Vorwort

Liebe zukünftige Schülerinnen und Schüler der Kaufmännischen Schule Crailsheim,

nach den Sommerferien beginnt ein neuer Schulabschnitt für euch. Damit ihr einen guten und erfolgreichen Start an unserer Schule, der KSCr, und insbesondere im Mathematikunterricht habt, soll euch das **„Mathe-Starter-Heft“** unterstützen.

Doch was ist das genau für ein Heft und wie könnt ihr dieses Heft sinnvoll nutzen?

Das „Mathe-Starter-Heft“ beinhaltet zunächst einen **Selbsteinschätzungsbogen**. Um diesen durchzuführen, geht ihr folgendermaßen vor:

- Nehmt einen Stift zur Hand.
- Kreuzt bei den einzelnen Themen an, wie sicher ihr euch in diesem Thema fühlt.

Nachdem ihr mithilfe des Selbsteinschätzungsbogens herausgefunden habt, in welchen Bereichen ihr meint, noch Übungsbedarf zu haben, könnt ihr mit dem „Mathe-Starter-Heft“ die folgenden Themen ohne den Gebrauch des Taschenrechners üben und wiederholen. Zu bestimmten Themen könnt ihr auch Erklärvideos mithilfe der QR-Codes anschauen:

- **Grundrechenarten:** Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division ohne Taschenrechner
- **Klammerrechnung:** Rechnen mit Minusklammern, Ausklammern und Ausmultiplizieren
- **Bruchrechnung I:** Brüche addieren und subtrahieren, Brüche kürzen und erweitern
- **Bruchrechnung II:** Brüche dividieren und multiplizieren
- **Dreisatzrechnung:** gerader und ungerader Dreisatz
- **Prozentrechnung:** Berechnen von Prozentwert, Prozentsatz und Grundwert
- **Maßangaben:** Maße in andere Einheiten umrechnen
- **Binomische Formeln:** Binomische Formeln anwenden
- **Potenzrechnung:** Potenzen addieren und subtrahieren, Potenzgesetze anwenden
- **Wurzelrechnung:** Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Wurzeln, teilweises Wurzelziehen und Nenner rational machen, Wurzeln in Potenzschreibweise
- **Lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme:** Lineare Gleichungen lösen und die zugehörige Lösungsmenge angeben, Lineare Gleichungssysteme mittels Gleichsetzungs-, Einsetzungs- und Additionsverfahren lösen
- **Quadratische Gleichungen:** Quadratische Gleichungen lösen mittels Wurzel ziehen, Ausklammern und Anwenden des Satzes vom Nullprodukt sowie der Mitternachtsformel

Natürlich schadet es nicht, wenn ihr euch für den erfolgreichen Start an der KSCr alle Themen nochmals anschaut. Jedes der oben genannten Themen beginnt mit einer Beispielaufgabe, mit welcher ihr die Rechenregeln (Theorie) wiederholen könnt. Im Anschluss folgen einige Übungsaufgaben, mit denen ihr eure Kenntnisse für die Mathematikstunden auffrischen könnt. Wer sich bereits sicher fühlt, kann natürlich auch nur die Übungsaufgaben lösen. Die Lösungen der Übungsaufgaben findet ihr am Ende dieses Heftes.

Wir wünschen euch viel Spaß und Erfolg mit eurem „Mathe-Starter-Heft“ und freuen uns auf den Unterricht mit euch!

Eure Mathematiklehrer der KSCr

Inhaltsverzeichnis

Selbsteinschätzungsbogen

Ich kann…		Da bin ich mir sicher.	Da bin ich unsicher.	Das kann ich noch nicht.
Grundrechenarten				
1.	… ohne Taschenrechner addieren und subtrahieren.			
2.	… ohne Taschenrechner multiplizieren und dividieren.			
Klammerrechnung				
3.	… mit Minusklammern rechnen.			
4.	… Klammern auflösen und die Rechenregeln für Klammern anwenden.			
5.	… ausklammern.			
6.	… ausmultiplizieren.			
Bruchrechnung I				
7.	… Brüche addieren			
8.	… Brüche subtrahieren.			
9.	… Brüche kürzen.			
10.	… Brüche erweitern.			
Bruchrechnung II				
11.	… Brüche multiplizieren.			
12.	… Brüche dividieren.			
Dreisatzrechnung				
13.	… den geraden Dreisatz anwenden.			
14.	… den ungeraden Dreisatz anwenden.			
Prozentrechnung				
15.	… den Prozentwert berechnen.			
16.	… den Prozentsatz berechnen.			
17.	… den Grundwert berechnen.			
Maßangaben				
18.	… Längeneinheiten ineinander überführen.			
19.	… Flächeneinheiten ineinander überführen.			
20.	… Volumeneinheiten ineinander überführen.			
21.	… Gewichtseinheiten ineinander überführen.			
22.	… Zeiteinheiten ineinander überführen.			

	Binomische Formeln			
23.	… die erste binomische Formel anwenden.			
24.	… die zweite binomische Formel anwenden.			
25.	… die dritte binomische Formel anwenden.			
	Potenzrechnung			
26.	… Potenzen addieren und subtrahieren.			
27.	… Potenzen mit gleicher Basis multiplizieren bzw. dividieren.			
28.	… Potenzen mit gleichem Exponenten multiplizieren bzw. dividieren.			
29.	… Potenzen potenzieren.			
30.	… Potenzen mit negativem Exponenten in eine Potenz mit positivem Exponenten überführen und umgekehrt.			
	Wurzelrechnung			
31.	… Wurzeln addieren und subtrahieren.			
32.	… Wurzeln multiplizieren und dividieren.			
33.	… teilweise die Wurzel ziehen.			
34.	… den Nenner rational machen.			
35.	… Wurzeln als Potenzen darstellen und umgekehrt.			
	Lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme			
36.	… lineare Gleichungen lösen.			
37.	… die Lösungsmenge einer linearen Gleichung angeben.			
38.	… das Gleichsetzungsverfahren zum Lösen eines linearen Gleichungssystems anwenden.			
39.	… das Einsetzungsverfahren zum Lösen eines linearen Gleichungssystems anwenden.			
40.	… das Additionsverfahren zum Lösen eines linearen Gleichungssystems anwenden.			
	Quadratische Gleichungen			
41.	… eine quadratische Gleichung mittels Wurzelziehen lösen.			
42.	… eine quadratische Gleichung mittels Ausklammern und Anwenden des Satzes vom Nullprodukt lösen.			
43.	… eine quadratische Gleichung mittels Mitternachtsformel lösen.			

Grundrechenarten

1. Addition und Subtraktion

Bei der Addition und Subtraktion von Zahlen unterscheidet man Rechen- und Vorzeichen voneinander. Treffen Vorzeichen und Rechenzeichen aufeinander, so muss eine Klammer gesetzt werden. In allen anderen Fällen können Terme verkürzt geschrieben werden.

Beispiel 1:

$5 - (-2) = 5 + 2 = 7$

Rechenzeichen Vorzeichen

$5 + (-3) = 5 - 3 = 2$

Rechenzeichen Vorzeichen

Rechen- und Vorzeichen können in einem Rechenzeichen verkürzt geschrieben werden: Bei der Addition und Subtraktion können positive Vorzeichen und Klammern weggelassen werden. Ist das Vorzeichen negativ, wird das vorangegangene Rechenzeichen umgekehrt. Dies bedeutet: Bei gleichen Zeichen: „+" und bei ungleichen Zeichen „−" .

Beispiel 2:

a) $(+4) + (+7) = 4 + 7 = 11$

$+$

b) $(-5) + (-2) = -5 - 2 = -7$

$-$

c) $(+7) - (+2) = 7 - 2 = 5$

$-$

d) $(-5) - (-3) = -5 + 3 = -2$

$+$

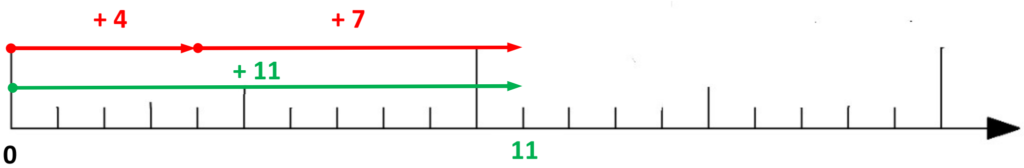
Die Addition und Subtraktion von Zahlen lässt sich am Zahlenstrahl durch das Aneinanderfügen von Pfeilen entsprechender Länge und Richtung darstellen. Das Rechenzeichen gibt die Bewegung vom ersten Pfeil (1. Summand) zum Ergebnis vor:

„+" bedeutet eine Bewegung nach rechts

„−" bedeutet eine Bewegung nach links

Beispiel 3:

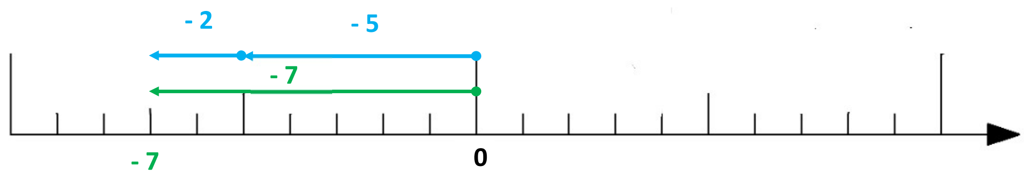
a)



$(+4) + (+7) = 4 + 7 = 11$

→ **Bewegung nach rechts**

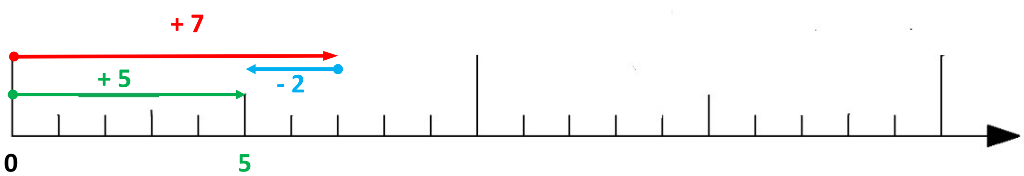
b)



$(-5) + (-2) = -5 - 2 = -7$

→ **Bewegung nach links**

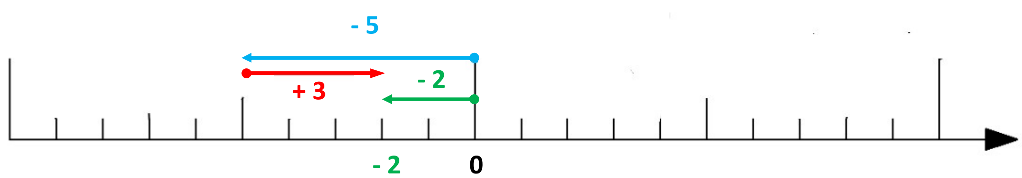
c)



$(+7) - (+2) = 7 - 2 = 5$

→ **Bewegung nach links**

d)



$(-5) - (-3) = -5 + 3 = -2$

→ **Bewegung nach rechts**

2. Multiplikation und Division

Haben beide Zahlen gleiche Vorzeichen, so ist das Ergebnis positiv. Haben jedoch beide Zahlen verschiedene Vorzeichen, so ist das Ergebnis negativ.

Beispiel 1:

a) $(+7) \cdot (+8) = +56 = 56$

b) $(-6) \cdot (+9) = -54$

c) $(-42) : (-7) = +6 = 6$

d) $(+72) : (-8) = -9$

Vorzeichen bei der Multiplikation und Division:

Multiplikation:	$+ \cdot + = +$	**Division:**	$+ : + = +$
	$- \cdot + = -$		$- : + = -$
	$+ \cdot - = -$		$+ : - = -$
	$- \cdot - = +$		$- : - = +$

3. Vorfahrtsregeln beim gemischten Rechnen – Reihenfolge beim Rechnen

Nur „Strichrechnungen"/ nur „Punktrechnungen" rechnet man von links nach rechts.

Beispiel 1:

$37 - 18 + 12 = 19 + 12 = 31$

„Punktrechnungen" werden vor „Strichrechnungen" ausgeführt.

Beispiel 2:

$13 + 6 \cdot 9 = 13 + 54 = 67$

Was in Klammern steht, wird zuerst ausgerechnet, das heißt: Innere Klammer vor äußerer Klammer.

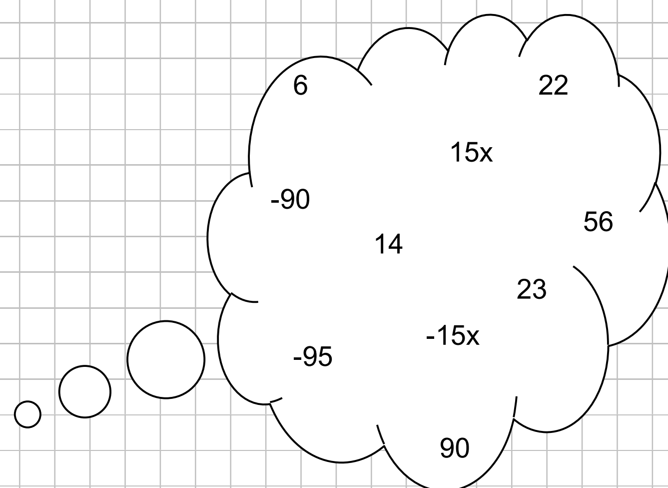
Beispiel 3:

$8 \cdot (25 - 16) = 8 \cdot 9 = 72$

Übungsaufgaben

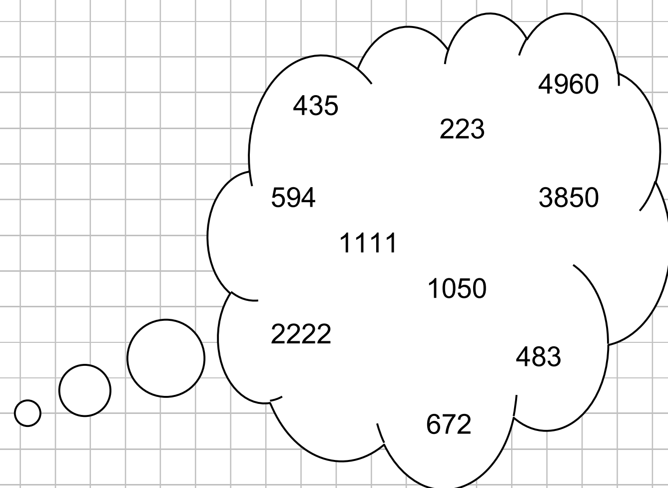
Aufgabe 1: Gib die richtigen Lösungen an! Rechne ohne Taschenrechner!

Nr.	Aufgabe	Platz für Nebenrechnungen
1.	7 + 15 =	**Finde dein Ergebnis.**
2.	17 + 73 =	
3.	73 – 17 =	
4.	-73 – 17 =	
5.	-1 – (-7) =	
6.	(-1) – 8 + 23 =	
7.	13 – (-11) – 1 =	
8.	-64 + 1 + (-32) =	
9.	2x + 13x =	
10.	-4x – 11x =	



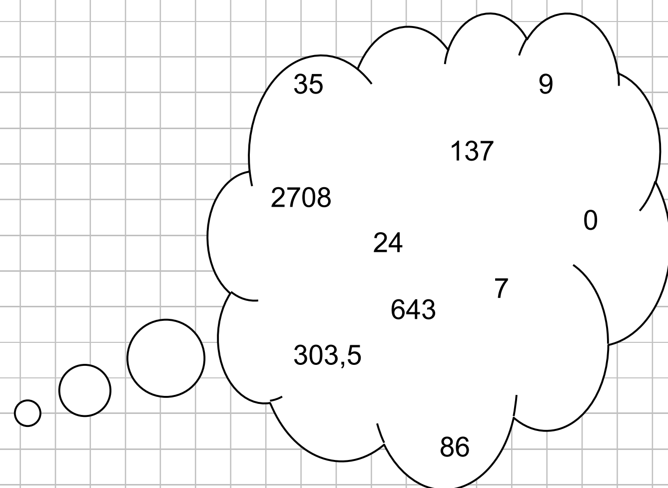
Aufgabe 2: Gib die richtigen Lösungen an! Rechne ohne Taschenrechner!

Nr.	Aufgabe	Platz für Nebenrechnungen
1.	$21 \cdot 32 =$	**Finde dein Ergebnis.**
2.	$15{,}5 \cdot 320 =$	
3.	$\frac{1}{3} \cdot 33 \cdot 54 =$	
4.	$23 \cdot 105 \cdot \frac{1}{5} =$	
5.	$0{,}5 \cdot 70 \cdot 110 =$	
6.	$49 \cdot 150 \cdot \frac{1}{7} =$	
7.	$24 \cdot \frac{1}{12} \cdot 111{,}5 =$	
8.	$0{,}5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4444 =$	
9.	$72{,}5 \cdot 12 \cdot 0{,}5 =$	
10.	$1111 \cdot \frac{1}{11} \cdot 22 =$	



Aufgabe 3: Gib die richtigen Lösungen an! Rechne ohne Taschenrechner!

Nr.	Aufgabe	Platz für Nebenrechnungen
1.	35 : 5 =	**Finde dein Ergebnis.**
2.	72 : 8 =	
3.	240 : 10 =	
4.	0 : 13 =	
5.	245 : 7 =	
6.	774 : 9 =	
7.	643 : 1 =	
8.	607 : 2 =	
9.	5480 : 40 =	
10.	32496 : 12 =	



Klammerrechnung

1. Rechnen mit Minusklammern und geschachtelten Klammern

Steht vor der Klammer ein Minuszeichen, werden beim Auflösen der Klammer alle Vor- und Rechenzeichen in der Klammer umgekehrt.

Beispiel 1:

a) $44a - (12a - b) = 44a - 12a + b = 32a + b$

b) $-(-33x + 15) + (3 - 2x) = 33x - 15 + 3 - 2x = 31x - 12$

Geschachtelte Klammern werden von innen nach außen aufgelöst.

Beispiel 2:

a) $-[4x - (3 - x)] = -[4x - 3 + x] = -[5x - 3] = -5x + 3$

b) $-(3a - 4) - [5a - (-2a - 3)] = -3a + 4 - [5a + 2a + 3] = -3a + 4 - [7a + 3]$
$= -3a + 4 - 7a - 3 = -10a + 1$

2. Ausklammern

Besitzt jeder Summand denselben Faktor, kann dieser Faktor ausgeklammert werden.
Dabei wird aus einer Summe beziehungsweise einer Differenz ein Produkt:

$$\boldsymbol{ax + ay = a \cdot (x + y)}$$

Beispiel:

a) $2x - 2y = 2 \cdot (x - y)$

b) $26xy - 13xz = 13x \cdot 2y - 13x \cdot z = 13x \cdot (2y - z)$

c) $\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}y = \frac{3}{4} \cdot x + \frac{3}{4} \cdot 2y = \frac{3}{4} \cdot (x + 2y)$

3. Ausmultiplizieren

Beim Ausmultiplizieren wird jeder Faktor außerhalb der Klammer mit jedem Term in der Klammer multipliziert.

Dabei wird durch Anwenden des Distributivgesetzes aus einem Produkt eine Summe beziehungsweise eine Differenz:

$$\boldsymbol{a \cdot (x+y) = ax + ay}$$

Beispiel 1:

a) $4 \cdot (2x^2 + x) = 4 \cdot 2x^2 + 4 \cdot x = 8x^2 + 4x$

b) $\frac{2}{3}u \cdot (9 - 15u) = \frac{2}{3}u \cdot 9 + \frac{2}{3}u \cdot (-15u) = 6u - 10u^2$

c) $-\frac{3}{4}x \cdot (-16x + 20) = -\frac{3}{4}x \cdot (-16x) - \frac{3}{4}x \cdot 20 = 12x^2 - 15x$

Zwei Klammern werden multipliziert, indem man jeden Summanden der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert. Die entstandene Summe kann dann durch Zusammenfassen vereinfacht werden.

$$\boldsymbol{(a+b) \cdot (x+y) = ax + ay + bx + by}$$

Hier wird ebenso wie oben das Distributivgesetz angewendet.

Beispiel 2:

a) $(a + 2) \cdot (a - 3) = a \cdot a + a \cdot (-3) + 2 \cdot a + 2 \cdot (-3) = a^2 - 3a + 2a - 6 = a^2 - a - 6$

b) $(3x - 5y) \cdot (2x + 5y) = 3x \cdot 2x + 3x \cdot 5y - 5y \cdot 2x - 5y \cdot 5y$
$= 6x^2 + 15xy - 10xy - 25y^2 = 6x^2 + 5xy - 25y^2$

c) $(3m - 4n) \cdot (5x - 3y) = 3m \cdot 5x + 3m \cdot (-3y) - 4n \cdot 5x - 4n \cdot (-3y)$
$= 15mx - 9my - 20nx + 12ny$

Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Löse die Klammern auf und vereinfache die Terme so weit wie möglich!

a) $2x - \left[\frac{1}{2}x - (x+4) - 2\right]$

b) $3y + [4 - (2y - 1) + 8y] + 7$

c) $4a - [2a - (a + 18) - 3] + 3$

d) $10x + y - [4x + (y - x) - 3x]$

e) $(5x + 8y) - [(3x - 6y) - (5x + 7y)]$

f) $6a - [9b - (2a + 4c) - (2a + 3b - 8c)]$

g) $8xy - [1 + (x + xy) - 2x] - (5xy - 1)$

h) $-[2a - (a^2 - 3a) - (a^2 - 4a) - 5a]$

Aufgabe 2: Multipliziere aus und fasse zusammen!

a) $4(x + y)$

b) $a(m + n)$

c) $2x(x + y)$

d) $-3a(-a - b)$

e) $2{,}4c(c^2 - 5c)$

f) $-2(15d - 2e + 8f)$

g) $\frac{2}{3}g(9 - 15g)$

h) $-\frac{3}{4}h(-16h + 20)$

Aufgabe 3: Klammere den größten gemeinsamen Faktor aus!

a) $2a - 2b$

b) $12c + 24d$

c) $26ab - 13ac$

d) $2ab + 2ac + 4ad$

e) $22ax + 11ax - 33az$

f) $\frac{3}{4}am - \frac{3}{4}an + \frac{3}{4}ao$

g) $18pq + 24po - 30qo$

h) $6x^2y + 12xy + 9y$

Bruchrechnung I

1. Erweitern und Kürzen

Erweitern bedeutet, dass sowohl Zähler als auch Nenner eines Bruches mit derselben natürlichen Zahl multipliziert werden. Dadurch wird der Wert des Bruches nicht verändert.

Beispiel 1:

$$\frac{3}{10} = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{4} = \frac{3 \cdot 4}{10 \cdot 4} = \frac{12}{40} = \frac{Zähler}{Nenner}$$

Ein Bruch soll mit einer natürlichen Zahl (hier: 4) erweitert werden.

Hierfür werden sowohl Zähler (hier: 3) als auch Nenner (hier: 10) mit der natürlichen Zahl (hier: 4) multipliziert.

Kürzen bedeutet, dass sowohl Zähler als auch Nenner eines Bruches durch dieselbe natürliche Zahl dividiert werden.

Beispiel 2:

$$\frac{16}{24} = \frac{16:8}{24:8} = \frac{2}{3}$$

Ein Bruch soll mit einer natürlichen Zahl (hier: 8) gekürzt werden, um ihn zu vereinfachen.

Hierfür werden sowohl Zähler als auch Nenner durch die natürliche Zahl (hier: 8) dividiert.

2. Addition und Subtraktion von Brüchen

Gleichnamige Brüche (besitzen denselben Nenner) werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die Zähler addiert bzw. subtrahiert und den Nenner beibehält. Das Ergebnis wird dann (wenn möglich) gekürzt.

Beispiel 1:

a) $$\underbrace{\frac{3}{4}+\frac{7}{4}}_{\text{Gleichnamige Brüche, da beide Summanden denselben Nenner besitzen}} = \underbrace{\frac{3+7}{4}}_{\text{Die beiden Zähler werden addiert / subtrahiert und der Nenner beibehalten.}} = \underbrace{\frac{10}{4} = \frac{5}{2}}_{\text{Sowohl der Zähler (hier: 10) als auch der Nenner (hier: 4) ist durch 2 teilbar, weshalb der Bruch hier mit 2 gekürzt werden kann.}}$$

b) $$\frac{3}{4}-\frac{7}{4} = \frac{3-7}{4} = \frac{-4}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

Ungleichnamige Brüche (besitzen nicht denselben Nenner) werden zunächst gleichnamig gemacht und dann addiert bzw. subtrahiert. Das Ergebnis wird dann (wenn möglich) gekürzt.

Beispiel 2:

a) $$\underbrace{\frac{21}{4}-\frac{3}{2}}_{\text{Ungleichnamige Brüche, da die Summanden nicht denselben Nenner besitzen}} = \underbrace{\frac{21}{4}-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{2} = \frac{21}{4}-\frac{3\cdot 2}{2\cdot 2}}_{\text{Der zweite Summand (hier: } -\frac{3}{2}\text{) muss nun mit einer natürlichen Zahl so erweitert werden, dass er denselben Nenner wie der erste Summand (hier: 4) besitzt.}} = \underbrace{\frac{21}{4}-\frac{6}{4}}_{\text{Gleichnamige Brüche, da beide Summanden denselben Nenner besitzen}} = \underbrace{\frac{21-6}{4}}_{\text{Die beiden Zähler werden addiert / subtrahiert und der Nenner beibehalten.}} = \frac{15}{4}$$

b) $$\frac{21}{4}+\frac{3}{2} = \frac{21}{4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{2} = \frac{21}{4}+\frac{3\cdot 2}{2\cdot 2} = \frac{21}{4}+\frac{6}{4} = \frac{21+6}{4} = \frac{27}{4}$$

Übungsaufgaben

***Aufgabe 1*: Kürze so weit wie möglich!**

a) $\frac{12}{20}$ **b)** $\frac{25}{100}$ **c)** $\frac{14}{21}$

d) $\frac{15}{25}$ **e)** $\frac{8}{16}$ **f)** $\frac{8}{18}$

g) $\frac{9}{18}$ **h)** $\frac{24}{6}$ **i)** $\frac{27}{36}$

Aufgabe 2: Berechne ohne Taschenrechner!

a) $\frac{3}{8}+\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$ **c)** $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$

d) $\frac{7}{12}+\frac{2}{3}$ **e)** $\frac{1}{15}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ **f)** $\frac{3}{5}+\frac{3}{10}+\frac{3}{5}$

Aufgabe 3: Berechne ohne Taschenrechner!

a) $1-\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{3}-\frac{7}{9}$ **c)** $\frac{1}{2}-\frac{3}{8}$

d) $\frac{5}{6}-\frac{2}{9}$ **e)** $\frac{4}{5}-\frac{5}{20}-\frac{6}{20}$ **f)** $\frac{7}{15}-\frac{1}{10}-\frac{1}{5}$

Bruchrechnung II

Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

Eine natürliche Zahl wird mit einem Bruch multipliziert, indem die Zahl mit dem Zähler multipliziert wird und der Nenner beibehalten wird: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$.

Das Ergebnis wird dann (wenn möglich) gekürzt.

Beispiel 1:

$$4 \cdot \frac{3}{10} = \underbrace{\frac{4 \cdot 3}{10}} = \underbrace{\frac{12}{10} = \frac{12:2}{10:2}} = \frac{6}{5}$$

Natürliche Zahl (hier: 4) wird mit dem Zähler multipliziert und der Nenner beibehalten.

Sowohl der Zähler (hier: 12) als auch der Nenner (hier: 10) ist durch 2 teilbar, weshalb der Bruch hier mit 2 gekürzt werden kann.

Ein Bruch wird mit einem Bruch multipliziert, indem jeweils die Zähler und die Nenner miteinander multipliziert werden: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Kürze (wenn möglich), bevor du im Zähler oder Nenner die Produkte berechnest!

Beispiel 2:

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \underbrace{\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 2}} = \frac{15}{8}$

Der Zähler wird mit dem Zähler (hier: $3 \cdot 5$) und der Nenner wird mit dem Nenner (hier: $4 \cdot 2$) multipliziert.

b) $\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} = \underbrace{\frac{3 \cdot 5}{10 \cdot 9}} = \underbrace{\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3}} = \frac{1}{6}$

Der Zähler wird mit dem Zähler (hier: $3 \cdot 5$) und der Nenner wird mit dem Nenner (hier: $10 \cdot 9$) multipliziert.

Ein Bruch soll mit einer natürlichen Zahl (hier: 3 und 5) gekürzt werden, um ihn zu vereinfachen.

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem der Nenner mit der Zahl multipliziert und der Zähler beibehalten wird: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$.

Beispiel 3:

$$\frac{3}{10} : 4 = \frac{3}{\underbrace{10 \cdot 4}} = \frac{3}{40}$$

Ganze Zahl (hier: 4) wird mit dem Nenner multipliziert und der Zähler beibehalten.

Eine Zahl bzw. ein Bruch wird durch einen Bruch dividiert, indem die Zahl bzw. der Bruch mit dem Kehrwert des Bruches multipliziert wird: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

Kürze (wenn möglich), bevor du im Zähler oder Nenner die Produkte berechnest!

Beispiel 4:

$$\frac{3}{10} : \frac{9}{5} = \underbrace{\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9}} = \frac{3 \cdot 5}{\underbrace{10 \cdot 9}} = \frac{1 \cdot 1}{\underbrace{2 \cdot 3}} = \frac{1}{6}$$

Der Bruch (hier: $\frac{3}{10}$) wird mit dem Kehrbruch (hier: $\frac{5}{9}$) multipliziert.

Der Zähler wird mit dem neuen Zähler (hier: $3 \cdot 5$) und der Nenner wird mit dem neuen Nenner (hier: $10 \cdot 9$) multipliziert.

Ein Bruch soll mit einer natürlichen Zahl (hier: 3 und 5) gekürzt werden, um ihn zu vereinfachen.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Berechne ohne Taschenrechner!

a) $\frac{4\cdot 1}{3}$ **d)** $\frac{6\cdot 2}{5}$ **g)** $\frac{8\cdot 1}{8}$

b) $\frac{1}{5}\cdot 3$ **e)** $\frac{3}{4}\cdot 7$ **h)** $\frac{2}{7}\cdot(-7)$

c) $4\cdot\frac{1}{6}$ **f)** $3\cdot\frac{2}{5}$ **i)** $-7\cdot\frac{4}{9}$

Aufgabe 2: Berechne ohne Taschenrechner!

a) $\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{6}{7}:\frac{2}{7}$ **g)** $-\frac{2}{5}:\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{3}:\frac{1}{3}$ **e)** $6:\frac{1}{8}$ **h)** $-\frac{10}{3}:\left(-\frac{5}{12}\right)$

c) $\frac{1}{3}:\frac{3}{2}$ **f)** $\frac{2}{5}:\frac{1}{5}$ **i)** $\frac{16}{9}:\left(-\frac{4}{3}\right)$

Aufgabe 3: Berechne ohne Taschenrechner!

a) $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2}$ **d)** $\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{10}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right)$ **g)** $\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{5}{3}-\left(1-\frac{4}{5}\right)$

b) $\frac{3}{4}+3\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$ **e)** $\frac{8}{7}+\frac{1}{2}:\frac{3}{4}$ **h)** $\left(\frac{1}{2}:\frac{2}{5}\right):\frac{5}{4}$

c) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ **f)** $\left(\frac{8}{9}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{10}\right)\cdot 3$

Dreisatzrechnung

Der Dreisatz ist ein Rechenverfahren, mit dem man für eine Eingabegröße die Ausgabegröße berechnen kann. Dazu muss zu einer bestimmten Eingabegröße die Ausgabegröße bekannt sein. Man unterscheidet in:

1. Gerader Dreisatz (proportionale Zuordnungen)

Wenn es auf der einen Seite UND auf der anderen Seite gleichmäßig mehr oder weniger wird, ist es immer eine proportionale Zuordnung und folglich ein gerader Dreisatz.

Bei den Eingabegrößen wird dieselbe Rechenoperation wie bei den Ausgabegrößen ausgeführt.

Beispiel:

Bei einem Obsthändler kosten 8 Äpfel 4,40 Euro. Berechne, wie viel Euro man für 3 Äpfel bezahlen muss!

Schritt 1: **Aufstellen** der proportionalen Zuordnung von Eingabegröße und Ausgabegröße

Schritt 2: **Dividiere** beide Größen durch den Wert der Eingabegröße (hier: 8 Äpfel), um auf eine Einheit zu kommen.

Schritt 3: **Multipliziere** mit dem Wert der neuen Eingabegröße (hier: 3 Äpfel), um die gesuchte Ausgabegröße zu erhalten.

	Anzahl Äpfel (Eingabegröße)	Preis in Euro (Ausgabegröße)	
	8	4,40	
: 8	1	0,55	: 8
· 3	3	1,65	· 3

Antwort: Man muss für 3 Äpfel 1,65 Euro bezahlen.

Für eine proportionale Zuordnung gilt:

Je mehr Äpfel man kauft, **desto mehr** muss man dafür bezahlen.

2. Ungerader Dreisatz (antiproportionale Zuordnungen)

Wenn es auf der einen Seite mehr, aber auf der anderen Seite gleichmäßig weniger wird (oder umgekehrt), ist es immer eine antiproportionale Zuordnung und folglich ein ungerader Dreisatz.

Bei den Ausgabegrößen wird jeweils die zu den Eingabegrößen umgekehrte Rechenoperation ausgeführt.

Beispiel:

6 Helfer ernten ein Erdbeerfeld in 4 Stunden ab. Berechne, wie lange 3 Helfer für die gleiche Arbeit benötigen!

Schritt 1: **Aufstellen** der antiproportionalen Zuordnung von Eingabegröße und Ausgabegröße

Schritt 2: **Dividiere** die Eingabegröße (hier: 6 Helfer) durch den Wert der Eingabegröße (hier: 6), um auf eine Einheit zu kommen. **Multipliziere** anschließend die Ausgabegröße (hier: 4 Arbeitsstunden) mit dem gleichen Wert (hier: 6).

Schritt 3: **Multipliziere** die Einheit (hier: 1 Helfer) mit dem Wert der neuen Eingabegröße (hier: 3 Helfer). **Dividiere** anschließend den neuen Wert der Ausgabegröße (hier: 24 Arbeitsstunden) durch den neuen Wert der Eingabegröße.

	Anzahl Helfer (Eingabegröße)	Arbeitsstunden (Ausgabegröße)	
	6	4	
: 6	1	24	· 6
· 3	3	8	: 3

Antwort: Drei Helfer benötigen acht Arbeitsstunden.

Für eine antiproportionale Zuordnung gilt:

Je mehr Erntehelfer arbeiten, **desto weniger** Zeit wird benötigt.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1:

Für sieben Liter Buttermilch bezahlt Tina 4,20 Euro. Berechne, wie viel vier Liter Buttermilch kosten!

Aufgabe 2:

Monika beobachtet, dass ein Gefrierschrank in drei Tagen 1,2 kWh verbraucht. Berechne den Verbrauch des Gefrierschranks in einer Woche!

Aufgabe 3:

Familie Maier plant eine Reise ins 420 km entfernte Wien. Sie fahren mit dem Auto mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 120 km/h auf der Autobahn. Berechne, wie lange sie benötigen, bis sie im 420 km entfernten Wien ankommen!

Aufgabe 4:

Ein Maurerbetrieb soll eine Sandsteinmauer ausbessern. Zur Herstellung von 3,6 m^3 Mauerwerk werden 720 Liter Mörtel benötigt. Ermittle, wie viel Mörtel die Maurer für die Herstellung von 12,4 m^3 Mauerwerk benötigen!

Aufgabe 5:

In den vergangenen Tagen hat es stark geregnet, so dass zahlreiche Keller mit Wasser vollgelaufen sind. Familie Mai ist ebenfalls betroffen und braucht mit vier Pumpen acht Stunden, um ihren Keller leer zu pumpen. Berechne, wie lange die Familie benötigt, wenn sie noch eine fünfte Pumpe einsetzt!

Aufgabe 6:

„Leckere Erdbeeren!" Vier Erntehelfer benötigen sechs Stunden, um die Erdbeeren eines kompletten Erdbeerfeldes zu ernten. Berechne, wie lange sechs Erntehelfer benötigen, um die schmackhaften Erdbeeren zu ernten!

Aufgabe 7:

Die Klassenfahrt in den Europapark steht an. Eine Schulklasse, die aus 28 Schülerinnen und Schülern sowie 2 Lehrern (30 Personen) besteht, hat dafür einen Bus gemietet. Jeder der Mitreisenden muss 14 Euro bezahlen. Am Ausflugstag sind 10 Personen krank. Berechne nun den neuen Preis pro Person!

Prozentrechnung

Beim Prozentrechnen werden Größen oder Zahlen miteinander verglichen. Hierbei sind prozentuale Anteile mit dem Nenner 100, das heißt: $1\% = \frac{1}{100}$.

Der **Grundwert *G*** ist das Ganze und entspricht 100 %.

Der **Prozentwert *W*** ist der Anteil vom Grundwert *G*, das heißt, des Ganzen.

Der **Prozentsatz *p%*** gibt den Anteil des Prozentwertes *W* vom Grundwert *G* in Prozent an.

1. Prozentwert berechnen

Beispiel:

Während einer Grippe-Welle fehlten an der Crailsheimer Realschule 20 % der 640 Jugendlichen. Berechne, wie viele Jugendliche fehlten!

gegeben: $G = 640$ Jugendliche
$p\% = \frac{20}{100} = 0{,}2$

gesucht: *W*

Ist der Grundwert *G* und der Prozentsatz *p%* gegeben, lässt sich der Prozentwert *W* mit der folgenden Formel berechnen: $W = p\% \cdot G$.

Rechnung: $W = 0{,}2 \cdot 640 = 128$

Antwort: Es waren 128 Jugendliche von der Grippe-Welle betroffen.

2. Prozentsatz berechnen

Beispiel:

Von 40 Mitgliedern der Freiwilligen Feuerwehr nehmen 34 Mitglieder an einem Lehrgang teil. Gib an, wie viel Prozent dies entspricht!

gegeben: $G = 40$ Mitglieder
$W = 34$ Mitglieder

gesucht: *p%*

Ist der Grundwert *G* und der Prozentwert *W* gegeben, lässt sich der Prozentsatz *p%* mit der folgenden Formel berechnen: $p\% = \frac{W}{G}$.

Rechnung: $p\% = \frac{34}{40} = 0{,}85 = 85\%$

Antwort: Es nehmen 85% aller Mitglieder der Freiwilligen Feuerwehr an dem Lehrgang teil.

3. Grundwert berechnen

Beispiel:

Am Schwimmwettbewerb nehmen 51 Schülerinnen und Schüler der Crailsheimer Realschule teil. Das sind 12 % der gesamten Schülerzahl. Berechne, wie viele Schülerinnen und Schüler auf die Schule gehen!

gegeben: $W = 51$ Schülerinnen und Schüler
$p\% = \frac{12}{100} = 0{,}12$

gesucht: G

Ist der Prozentwert *W* und der Prozentsatz *p%* gegeben, lässt sich der Grundwert *G* mit der folgenden Formel berechnen: $\boldsymbol{G = \frac{W}{p\%}}$.

Rechnung: $G = \frac{51}{0{,}12} = 425$

Antwort: Es gehen 425 Schülerinnen und Schüler auf die Schule.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1:

Herr Haas ist Grundstücksmakler in Freiburg und verkauft Familie Müller ein Grundstück für 120000 Euro. Er berechnet dabei 5 % des Kaufpreises als Vermittlungsgebühr. Berechne, wie hoch die Vermittlungsgebühr ist, die Herr Haas bei diesem Verkauf einnimmt!

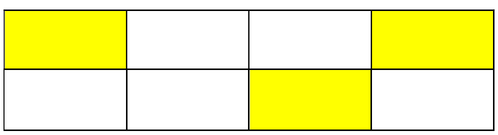
Aufgabe 2:

Die Auszubildende Nadine erhält während ihrer Ausbildung bei der „Sonnenschein-AG“ 820 Euro Ausbildungsvergütung. Davon zieht ihr der Ausbildungsbetrieb „Sonnenschein-AG“ 21 % für die Sozialversicherungsbeiträge ab. Berechne, wie viel sie netto ausgezahlt bekommt!

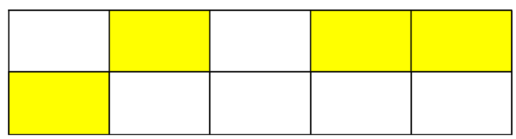
Aufgabe 3:

Gib an, wie viel Prozent gelb eingefärbt sind!

a)



b)



Aufgabe 4:

Der pensionierte Herr Hofmann ist leidenschaftlicher Aktionär. Er erhält für seine Aktie im Nennwert für 50 Euro eine Dividende von 7 Euro. Berechne, wie viel Prozent die Rendite beträgt, die Herr Hofmann macht!

Aufgabe 5:

Herr Maier arbeitet bei der „Schneezauber-GmbH“ und bekommt netto 920 Euro Lohn. Sein Steuersatz beträgt 14 %, seine Sozialausgaben 21 %. Berechne, wie hoch sein Bruttolohn ist!

Aufgabe 6:

Der 19-jährige Timo hat sich von seinen Ersparnissen vor einem Jahr einen VW-Golf gekauft. Der Neuwagen verlor im ersten Jahr 20 % seines Wertes. Der Wertverlust beträgt 4500 Euro. Berechne, wie viel Timo für sein erstes eigenes Auto ausgegeben hat!

Maßangaben

Jede Maßangabe setzt sich aus der Maßzahl und der zugehörigen Maßeinheit zusammen.

$\mathbf{300\ m}$

Maßzahl **Maßeinheit**

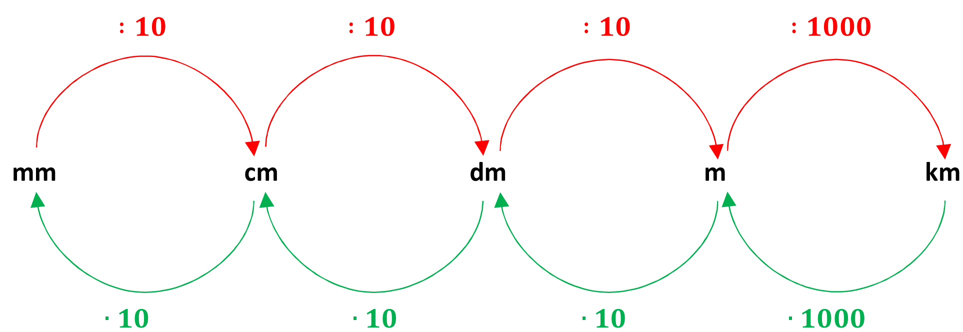
Sind Maßangaben in verschiedenen Maßeinheiten gegeben, müssen sie vergleichbar gemacht werden, indem sie in die gleiche Maßeinheit umgerechnet werden. Nur wenn sie die gleiche Maßeinheit besitzen, können sie zum Beispiel subtrahiert bzw. addiert werden.

Um eine Maßangabe in eine kleinere Maßeinheit umzurechnen, muss sie mit dem entsprechenden Umrechnungsfaktor multipliziert werden.

Soll eine Maßangabe in eine größere Maßeinheit umgerechnet werden, muss sie durch den entsprechenden Umrechnungsfaktor dividiert werden.

1. Längeneinheiten

Für Längenangaben gilt für die Umrechnung in die nächstgrößere bzw. nächstkleinere Einheit:



Beispiel 1:
Wandle jeweils in die angegebene Längeneinheit um!

a) $130\ cm\ \ (in\ m)$

$130\ cm = 130 : 10 : 10\ m = 1{,}3\ m$

b) $5{,}2\ m\ (in\ mm)$

$5{,}2\ m = 5{,}2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10\ mm = 5200\ mm$

c) $76000\ dm\ (in\ km)$

$76000\ dm = 76000 : 10 : 1000\ km = 7{,}6\ km$

d) $32{,}4\ m\ (in\ dm)$

$32{,}4\ m = 32{,}4 \cdot 10\ dm = 324\ dm$

Beispiel 2:
Berechne und gib das Ergebnis in der größeren Einheit an!

a) $12\,m + 1\,km$

$12: 1000\,km + 1\,km = 0{,}012\,km + 1\,km = 1{,}012\,km$

b) $2\,m + 3\,dm$

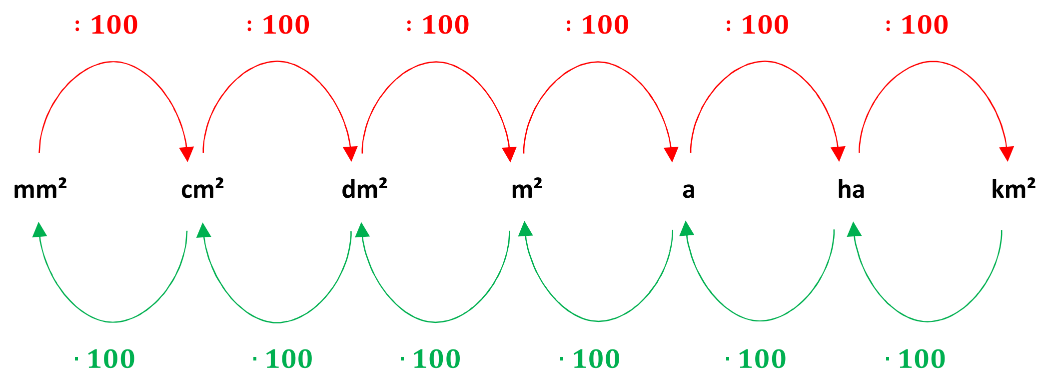
$2\,m + 3: 10\,m = 2\,m + 0{,}3\,m = 2{,}3\,m$

c) $3{,}44\,\mathrm{m} + 12{,}8\,\mathrm{dm} + 3\,\mathrm{mm}$

$3{,}44\,m + 12{,}8: 10\,m + 3: 10: 10: 10\,m = 3{,}44\,m + 1{,}28\,m + 0{,}003\,m = 4{,}723\,m$

2. Flächeneinheiten

Für Flächenangaben gilt für die Umrechnung in die nächstgrößere bzw. nächstkleinere Einheit:



1 a	**= 1 Ar**	**= 100 m²**
1ha	**= 1 Hektar**	**= 100 a**

Beispiel 1:
Wandle jeweils in die angegebene Flächeneinheit um!

a) $9{,}4\,mm^2\ (in\ cm^2)$

$9{,}4\,mm^2 = 9{,}4: 100\,cm^2 = 0{,}094\,cm^2$

b) $0{,}04\,km^2\ (in\ ha)$

$0{,}04\,km^2 = 0{,}04 \cdot 100\,ha = 4\,ha$

c) $16000\,m^2\ (in\ ha)$

$16000\,m^2 = 16000: 100: 100\,ha = 1{,}6\,ha$

d) $160\,a\ (in\ dm^2)$

$160\,a = 160 \cdot 100 \cdot 100\,dm^2 = 1600000\,dm^2$

Beispiel 2:
Berechne und gib das Ergebnis in der größeren Einheit an!

a) $600\ m^2 - 5\ a$

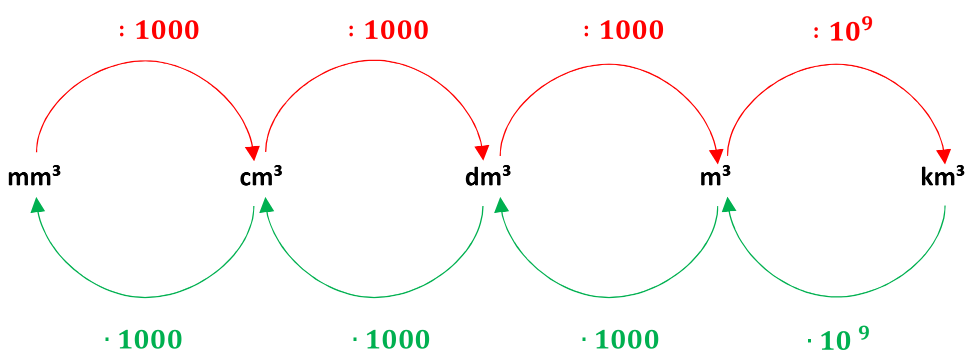
$600 : 100\ a - 5\ a = 6a - 5a = 1a$

b) $3\ \mathrm{cm}^2 + 400\ \mathrm{mm}^2$

$3\ cm^2 + 400 : 100\ cm^2 = 3\ cm^2 + 4\ cm^2 = 7\ cm^2$

3. Volumeneinheiten

Für Volumenangaben gilt für die Umrechnung in die nächstgrößere bzw. nächstkleinere Einheit:



1 cm³	**= 1 ml (Milliliter)**
1 dm³	**= 1 l (Liter)**
100 dm³	**= 1 hl (Hektoliter)**

Beispiel 1:
Wandle jeweils in die angegebene Volumeneinheit um!

a) $0{,}67\ dm^3\ \ (in\ cm^3)$

$0{,}67\ dm^3\ = 0{,}67 \cdot 1000\ cm^3 = 670\ cm^3$

b) $0{,}002\ m^3\ (in\ cm^3)$

$0{,}002\ m^3 = 0{,}002 \cdot 1000 \cdot 1000\ cm^3 = 2000\ cm^3$

c) $21000\ cm^3 (in\ m^3)$

$21000\ cm^3 = 21000 : 1000 : 1000\ m^3 = 0{,}021\ m^3$

d) $92000\ ml\ (in\ dm^3)$

$92000\ ml = 92000 cm^3 = 92000 : 1000\ dm^3 = 92\ dm^3$

Beispiel 2:
Berechne und gib das Ergebnis in der größeren Einheit an!

a) $3\,l + 20\,cm^3$

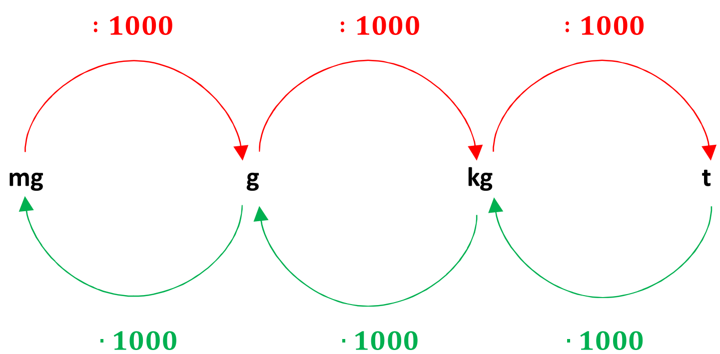
$3\,dm^3 + 20\,cm^3 = 3\,dm^3 + 20 : 1000\,dm^3 = 3\,dm^3 + 0{,}02\,dm^3 = 3{,}02\,dm^3$

b) $30\,ml + 1{,}44\,dm^3$

$30\,cm^3 + 1{,}44\,dm^3 = 30 : 1000\,dm^3 + 1{,}44\,dm^3 = 0{,}03\,dm^3 + 1{,}44 dm^3 = 1{,}47\,dm^3$

4. Gewichtseinheiten

Für Gewichtsangaben gilt für die Umrechnung in die nächstgrößere bzw. nächstkleinere Einheit:



Beispiel 1:
Wandle jeweils in die angegebene Gewichtseinheit um!

a) $0{,}04\,kg\ \ (in\ g)$

$0{,}04\,kg = 0{,}04 \cdot 1000\,g = 40\,g$

b) $800\,g\ (in\ t)$

$800\,g = 800 : 1000 : 1000\,t = 0{,}0008\,t$

c) $130\,mg\ (in\ kg)$

$130\,mg = 130 : 1000 : 1000\,kg = 0{,}00013\,kg$

d) $8{,}4\,t\ (in\ g)$

$8{,}4\,t = 8{,}4 \cdot 1000 \cdot 1000\,g = 8400000\,g$

Beispiel 2:
Berechne und gib das Ergebnis in der größeren Einheit an!

a) $5{,}8\,t - 420\,kg$

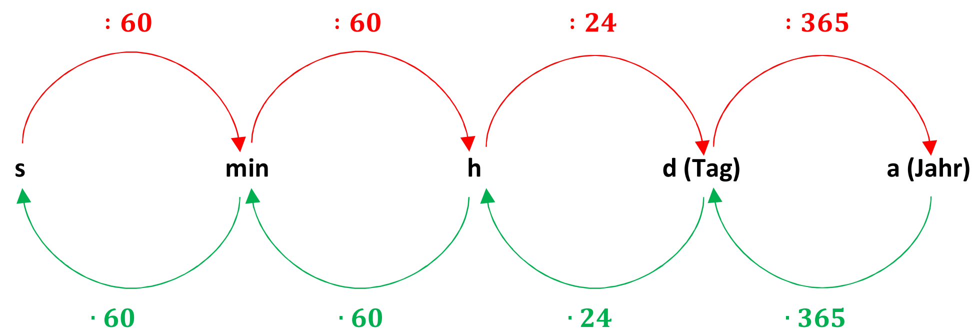
$5{,}8\,t - 420 : 1000\,t = 5{,}8\,t - 0{,}42\,t = 5{,}38\,t$

b) $2520\ mg + 3\ g + 12{,}5\ kg$

$2520 : 1000 : 1000\ kg + 3 : 1000\ kg + 12{,}5\ kg = 0{,}00252\ kg + 0{,}003\ kg + 12{,}5\ kg = 12{,}50552\ kg$

5. Zeiteinheiten

Für Zeitangaben gilt für die Umrechnung in die nächstgrößere bzw. nächstkleinere Einheit:



Beispiel 1:
Wandle jeweils in die angegebene Zeiteinheit um!

a) $2{,}6\ h\ \ (in\ s)$

$2{,}6\ h = 2{,}6 \cdot 60 \cdot 60\ s = 9360\ s$

b) $2160\ min\ (in\ d)$

$2160 : 60 : 24\ d = 1{,}5\ d$

c) $0{,}2\ a\ (in\ d)$

$0{,}2\ a = 0{,}2 \cdot 365\ d = 73\ d$

d) $4750\ h\ (in\ a)$

$4750\ h = 4750 : 24 : 365\ a \approx 0{,}54\ a$

Beispiel 2:
Berechne und gib das Ergebnis in der größeren Einheit an!

a) $2{,}4\ h - 36\ min$

$2{,}4\ h - 36 : 60\ h = 2{,}4\ h - 0{,}6\ h = 1{,}8\ h$

b) $180\ s + 3{,}2\ h$

$180 : 60 : 60\ h + 3{,}2\ h = 0{,}05\ h + 3{,}2\ h = 3{,}25\ h$

Übungsaufgaben

Aufgabe 1:

Am Crailsheimer Bahnhof soll ein Zug um 6:51 Uhr abfahren. Aufgrund einer Verspätung fährt er jedoch erst um 7:43 Uhr los. Gib an, mit welcher Verspätung der Zug abfährt!

Aufgabe 2: Rechne die nachfolgenden Größen in die vorgegebenen Einheiten um!

a) $3\frac{3}{4}h$ =	min
b) 3,5 min =	h
c) 3499 km =	m
d) 0,5 mm^3	m^3
e) 300 ml =	l

Aufgabe 3: Berechne und gib das Ergebnis in der angegebenen Einheit an!

a) 2,44 m + 9,8 cm + 12,3 mm =	cm
b) 3cm^2 + 700mm^2 =	cm^2
c) 0,23dm^3 + 20cm^3=	cm^3

Binomische Formeln

Die binomischen Formeln können als Hilfsmittel beim Ausmultiplizieren bezeichnet werden, weil dadurch einerseits Zeit und andererseits Rechenschritte gespart werden können.

1. Die erste binomische Formel

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$

$$(\textbf{Summe})^2 = (\textbf{Summand 1})^2 + \textbf{doppeltes Produkt aus beiden Summanden} + (\textbf{Summand 2})^2$$

Dies ergibt sich auch mittels Ausmultiplizieren:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ba} + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$

Beispiele:

Wende die 1. binomische Formel an!

a) $(a+2)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 2 + 2^2 = a^2 + 4a + 4$

b) $(2x+6)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 6 + 6^2 = 2^2\cdot x^2 + 24x + 36 = 4x^2 + 24x + 36$

c) $(3x+6y)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 6y + (6y)^2 = 3^2\cdot x^2 + 36xy + 6^2y^2 = 9x^2 + 36xy + 36y^2$

2. Die zweite binomische Formel

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$

$$(\textbf{Summe})^2 = (\textbf{Summand 1})^2 - \textbf{doppeltes Produkt aus beiden Summanden} + (\textbf{Summand 2})^2$$

Dies ergibt sich auch mittels Ausmultiplizieren:

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ba} + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$

Beispiele:

Wende die 2. binomische Formel an!

a) $(3-x)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + x^2 = 9 - 6x + x^2$

b) $(4a-6)^2 = (4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 6 + 6^2 = 4^2 \cdot a^2 - 48a + 36 = 16a^2 - 48a + 36$

c) $(2x-5y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5y + (5y)^2 = 2^2 \cdot x^2 - 20xy + 5^2y^2 = 4x^2 - 20xy + 25y^2$

3. Die dritte binomische Formel

$$\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

Dies ergibt sich auch mittels Ausmultiplizieren:

$$\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2}$$

Beispiele:

Wende die 3. binomische Formel an!

a) $(c+2)(c-2) = c^2 - 2^2 = c^2 - 4$

b) $(4x+2)(4x-2) = (4x)^2 - 2^2 = 4^2 \cdot x^2 - 4 = 16x^2 - 4$

c) $(2x+6y)(2x-6y) = (2x)^2 - (6y)^2 = 2^2 \cdot x^2 - 6^2y^2 = 4x^2 - 36y^2$

Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Schreibe als Summe!

a) $(x+y)^2$ **c)** $(x-2y)\cdot(x+2y)$ **e)** $(x-5y)^2$

b) $(2x-y)^2$ **d)** $(2a-5b)^2$ **f)** $(3a-7b)\cdot(3a+7b)$

Aufgabe 2: Schreibe als Produkt!

a) $9x^2+30x+25$ **b)** $16a^2-72ab+81b^2$ **c)** $64a^2-1$

Aufgabe 3: Vervollständige zu einem Binom!

a) $4x^2+\quad+49y^2$ **b)** $\quad-70ab+49b^2$ **c)** $64a^2-16ab+$

Aufgabe 4: Vereinfache!

a) $(7x-5y)^2+(6x+7y)(6x-7y)-(4x+9y)^2$

b) $4(3a-2)^2-2(a-4)(a+4)+2(4a+2b)^2$

Potenzrechnung

Die Potenz a^n ist das Produkt aus n gleichen Faktoren a. Es gilt:

$$\underbrace{\boldsymbol{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}}_{\boldsymbol{n-mal}} \boldsymbol{= a^n}$$

Es gelten die folgenden Bezeichnungen: a^n

Basis **Exponent (Hochzahl)**

Weiter gilt: $\boldsymbol{a^0 = 1}$.

Bei Potenzen mit negativer Basis bleibt das Vorzeichen – erhalten, wenn der Exponent ungerade ist.

$$\boldsymbol{(-a)^3 = -a^3}$$

Bei Potenzen mit negativer Basis wird das Vorzeichen +, wenn der Exponent gerade ist.

$$\boldsymbol{(-a)^4 = a^4}$$

1. Potenzen addieren und subtrahieren

Potenzen können nur addiert bzw. subtrahiert werden, wenn sie die gleiche Basis und den gleichen Exponenten besitzen.

$\boldsymbol{ax^n + bx^n = (a+b) \cdot x^n}$ **und** $\boldsymbol{ax^n - bx^n = (a-b) \cdot x^n}$

Beispiele:

Berechne und fasse so weit wie möglich zusammen!

a) $5a^4 + 4a^3 - 2a^4 + a^3 = (5-2)a^4 + (4+1)a^3 = 3a^4 + 5a^3$

b) $7x^4 - 6y^4 - 5x^4 + 3y^4 = (7-5)x^4 + (-6+3)y^4 = 2x^4 - 3y^4$

c) $2ax^n - 3by^m - ax^n + 4by^m = (2a-a)x^n + (-3b+4b)y^m = ax^n + by^m$

2. Potenzen mit der gleichen Basis multiplizieren und dividieren

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält.

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

Beispiel 1:

a) $2^4 \cdot 2^7 = 2^{4+7} = 2^{11}$

b) $a^3 \cdot a^6 = a^{3+6} = a^9$

c) $3a^2 \cdot 5a^7 = 3 \cdot 5 \cdot a^{2+7} = 15a^9$

d) $a^{b-1} \cdot a^2 = a^{b-1+2} = a^{b+1}$

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält.

$$x^m : x^n = \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \text{ mit } x \neq 0$$

Beispiel 2:

a) $2^4 : 2^7 = 2^{4-7} = 2^{-3}$

b) $a^6 : a^3 = a^{6-3} = a^3$

c) $\frac{3a^7}{5a^2} = \frac{3}{5}a^{7-2} = \frac{3}{5}a^5$

d) $\frac{a^{b-1}}{a^2} = a^{(b-1)-2} = a^{b-3}$

3. Potenzen mit dem gleichen Exponenten multiplizieren und dividieren

Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert und den gemeinsamen Exponenten beibehält.

$$x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m$$

Beispiel 1:

a) $2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3)^4 = 6^4$

b) $3^2 \cdot a^2 = (3 \cdot a)^2 = (3a)^2$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{b-1} \cdot 8^{b-1} = \left(\frac{3}{4} \cdot 8\right)^{b-1} = 6^{b-1}$

d) $(-3a)^{2-k} \cdot (4b)^{2-k} = (-3a \cdot 4b)^{2-k} = (-12ab)^{2-k}$

Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividiert und den gemeinsamen Exponenten beibehält.

$$x^m : y^m = \frac{x^m}{y^m} = \left(\frac{x}{y}\right)^m \text{ mit } y \neq 0$$

Beispiel 2:

a) $10^4 : 2^4 = \left(\frac{10}{2}\right)^4 = 5^4$

b) $\frac{(3a)^2}{(6ab)^2} = \left(\frac{3a}{6a}\right)^2 = \left(\frac{1}{2b}\right)^2$

c) $\frac{3^{b-1}}{21^{b-1}} = \left(\frac{3}{21}\right)^{b-1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{b-1}$

d) $\frac{(a^2-b^2)^4}{(a+b)^4} = \left(\frac{a^2-b^2}{a+b}\right)^4 = \left(\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)}\right)^4 = (a-b)^4$

4. Potenzieren von Potenzen

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert und die Basis beibehält.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Beispiele:

a) $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$

b) $(-3^4)^2 = (-3)^{4 \cdot 2} = (-3)^8 = 3^8$

c) $(4a^2)^3 = 4^3 a^{2 \cdot 3} = 64a^6$

d) $(2a^5b^3c^2)^4 = 2^4 \cdot a^{5 \cdot 4} \cdot b^{3 \cdot 4} \cdot c^{2 \cdot 4} = 16a^{20}b^{12}c^8$

5. Potenzen mit negativem Exponenten

Potenzen mit negativem Exponenten können in Brüche umgewandelt werden.

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1^n}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n} \quad \textbf{mit } \boldsymbol{a \neq 0}$$

Beispiel: $\boldsymbol{a^{-2} = \frac{1}{a^2}}$

$\boldsymbol{2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = (0,5)^5}$

Beispiele:

a) $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$

b) $2a^{-3} = 2 \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{2}{a^3}$

c) $3^{-2} \cdot 3^{-5} = 3^{-2+(-5)} = 3^{-7} = \frac{1}{3^7}$

d) $2^{-3} : 2^5 = \frac{2^{-3}}{2^5} = 2^{-3-5} = 2^{-8} = \frac{1}{2^8}$

e) $3^{-2} \cdot 4^{-2} = (3 \cdot 4)^{-2} = 12^{-2} = \frac{1}{12^2} = \frac{1}{144}$

f) $4^{-3} : 2^{-3} = \left(\frac{4}{2}\right)^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

g) $(3^2)^{-3} = 3^{2\cdot(-3)} = 3^{-6} = \frac{1}{3^6}$

Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Vereinfache und schreibe mit einer Potenz!

a) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^4$

b) $x^3 \cdot x^3 \cdot x^5$

c) $5^a \cdot 5^b \cdot 2^c \cdot 2^d$

d) $x^m \cdot y^n \cdot z^p \cdot x^q \cdot y^r \cdot z$

e) $a \cdot b^y \cdot c^m \cdot a^x \cdot b^{2y} \cdot c^7 \cdot a^y \cdot b^{3y}$

Aufgabe 2: Forme das Produkt bzw. den Quotienten um!

a) $x^2 \cdot y^2$

b) $a^5 \cdot b^5$

c) $2^3 \cdot z^3$

d) $10^4 \cdot x^4$

e) $\frac{c^5}{d^5}$

f) $\frac{(8a)^4}{(2a)^4}$

Aufgabe 3: Vereinfache so weit wie möglich!

a) $\frac{a^8}{a^2}$

b) 10^4

c) 10^{-2}

d) $(-3a)^2$

e) $b^5 \cdot b^4$

f) $(x^3)^7$

g) $\frac{(5x)^2}{(8y)^2}$

h) $(\frac{-2a}{3b})^2$

Wurzelrechnung

Eine Zahl x heißt n-te Wurzel von a, wenn gilt: $x^n = a$
Man schreibt dann: $x = \sqrt[n]{a}$

Es gelten folgende Bezeichnungen: Wurzelexponent Radikand/ Wurzelbasis

Multipliziert man die Zahl $\sqrt[n]{a}$ genau n-mal mit sich selbst, so ergibt sich:

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{\text{n-mal}} = a$$

Beispiel: Die Quadratwurzel ist gegeben durch $\sqrt{a}$ und es gilt: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a \;, a \geq 0$.
Die Quadratwurzel einer negativen Zahl existiert nicht, da keine Zahl mit sich selbst multipliziert einen negativen Wert ergibt.

Die Beispiele zu den einzelnen Themengebieten werden im Folgenden am Beispiel der Quadratwurzeln veranschaulicht.

1. Addition und Subtraktion von Wurzeln

Man kann nur Wurzeln mit gleichen Radikanden und gleichen Wurzelexponenten zusammenfassen. Wurzeln mit gleichen Radikanden und gleichen Wurzelexponenten werden addiert und subtrahiert, indem man ihre Beizahlen (Koeffizienten) addiert und subtrahiert.

Es gilt also:

$$a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[n]{x} = (a+b) \cdot \sqrt[n]{x}$$

$$a\sqrt[n]{x} - b\sqrt[n]{x} = (a-b) \cdot \sqrt[n]{x}$$

Folglich gilt ebenfalls: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ lässt sich nicht weiter vereinfachen, da die Radikanden verschieden sind.

Beispiele:

a) $6\sqrt{10} - 8\sqrt{11} - 7\sqrt{10} + 9\sqrt{11} = (6-7)\sqrt{10} + (-8+9)\sqrt{11} = -\sqrt{10} + \sqrt{11}$

b) $5\sqrt{15} - 7\sqrt{12} - 8\sqrt{15} + 9\sqrt{12} = (5-8)\sqrt{15} + (-7+9)\sqrt{12} = -3\sqrt{15} + 2\sqrt{12}$

c) $3\sqrt{a} + 4\sqrt{b} - 2\sqrt{a} + \sqrt{b} = (3-2)\sqrt{a} + (4+1)\sqrt{b} = \sqrt{a} + 5\sqrt{b}$

d) $2x\sqrt{a} - a\sqrt{x} - x\sqrt{a} - a\sqrt{x} = (2x-x)\sqrt{a} + (-a-a)\sqrt{x} = x\sqrt{a} - 2a\sqrt{x}$

2. Multiplikation und Division von Wurzeln

Wurzeln werden multipliziert, indem man die Radikanden multipliziert und den gemeinsamen Wurzelexponenten beibehält.

Es gilt also:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Quadrieren und Radizieren heben sich auf.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a^2} = a$$

Beispiele:

a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt{5x} \cdot \sqrt{20x} = \sqrt{5x \cdot 20x} = \sqrt{100x^2} = 10x$

c) $\left(\sqrt{20} - \sqrt{5}\right) \cdot \sqrt{5} = \sqrt{20} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{20 \cdot 5} - \sqrt{5 \cdot 5} = \sqrt{100} - \sqrt{25} = 10 - 5 = 5$

d) $\left(4 + \sqrt{10}\right) \cdot \left(4 - \sqrt{10}\right) = 4^2 - \left(\sqrt{10}\right)^2 = 16 - \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 16 - \sqrt{100} = 16 - 10 = 6$

e) $\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 - 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{7 \cdot 7} - 2\sqrt{7 \cdot 3} + \sqrt{3 \cdot 3} = \sqrt{49} - 2\sqrt{21} + \sqrt{9}$
$= 7 - 2\sqrt{21} + 3 = 10 - 2\sqrt{21}$

Wurzeln werden dividiert, indem man die Radikanden dividiert und den gemeinsamen Wurzelexponenten beibehält.

Es gilt also:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Beispiele:

a) $\sqrt{27} : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$

b) $\sqrt{50} : \sqrt{2} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$

c) $\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

e) $\frac{\sqrt{20a}+\sqrt{45a}}{\sqrt{5a}} = \frac{\sqrt{20a}}{\sqrt{5a}} + \frac{\sqrt{45\ }}{\sqrt{5a}} = \sqrt{\frac{20}{5a}} + \sqrt{\frac{45a}{5a}} = \sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$

f) $\frac{\sqrt{3a^3}+\sqrt{27\ \ ^3}}{\sqrt{3a}} = \frac{\sqrt{3a^3}}{\sqrt{3a}} + \frac{\sqrt{27\ \ ^3}}{\sqrt{3a}} = \sqrt{\frac{3a^3}{3a}} + \sqrt{\frac{27\ \ ^3}{3a}} = \sqrt{a^2} + \sqrt{9a^2} = a + 3a = 4a$

3. Teilweises Wurzelziehen

Beispiele:

a) $\sqrt{32} \quad = \quad \sqrt{16 \cdot 2} \quad = \quad \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} \quad = \quad 4 \cdot \sqrt{2}$

Der Radikand (hier: 32) wird in ein Produkt aus einer Quadratzahl (hier: 16) und einer weiteren Zahl (hier: 2) zerlegt. **Wichtig:** Eine der beiden Zahlen muss eine Quadratzahl sein.

Rechenregeln zur Multiplikation von Wurzeln anwenden:

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{b}}$$

Hier: $n = 2$.

Teilweise die Wurzel ziehen (hier: $\sqrt{16} = 4$).

b) $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5}$

c) $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot \sqrt{5}$

d) $\sqrt{9b^3} = \sqrt{9b^2 \cdot b} = \sqrt{9b^2} \cdot \sqrt{b} = 3b \cdot \sqrt{b}$

e) $\sqrt{16x^3y} = \sqrt{16x^2 \cdot xy} = \sqrt{16x^2} \cdot \sqrt{xy} = 4x \cdot \sqrt{xy}$

4. Nenner rational machen

Beispiele:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \quad = \quad \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \quad = \quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5 \cdot 5}} \quad = \quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}} \quad = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$

Erweitere den Bruch mit der Wurzel, die im bisherigen Nenner steht (hier: $\sqrt{5}$).

Rechenregeln zur Multiplikation von Wurzeln anwenden:

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{b}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}$$

Hier: $n = 2$.

b) $\frac{3}{\sqrt{a}} = \frac{3}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{3 \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a \cdot a}} = \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} = \frac{3\sqrt{a}}{a}$

c) $\frac{3a}{\sqrt{3a}} = \frac{3a}{\sqrt{3a}} \cdot \frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{3a}} = \frac{3a \cdot \sqrt{3a}}{\sqrt{3a} \cdot \sqrt{3a}} = \frac{3a\sqrt{3a}}{\sqrt{3a \cdot 3a}} = \frac{3a\sqrt{3a}}{\sqrt{9a^2}} = \frac{3a\sqrt{3a}}{3a} = \sqrt{3a}$

Sonderfall: Summe bzw. Differenz im Nenner

Zum Erweitern wird die dritte binomische Formel angewandt. Erweitere den Bruch folglich mit $(\sqrt{3} - \sqrt{5})$, denn es gilt: $(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5}) = 3 - 5$.

d) $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{2}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})} \cdot \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})} = \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{5})} = \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{\sqrt{3 \cdot 3} - \sqrt{5 \cdot 5}} = \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{\sqrt{9} - \sqrt{25}} = \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3-5}$

$= \frac{2(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{-2} = -(\sqrt{3} - \sqrt{5}) = -\sqrt{3} + \sqrt{5}$

5. Wurzeln als Potenzen

Jede Wurzel kann in eine Potenz mit rationalem Exponenten umgewandelt werden. Der Wurzelexponent wird zum Nenner des Potenzexponenten. Umgekehrt kann jede Potenz mit rationalem Exponenten als Wurzel geschrieben werden.

Potenzschreibweise der n-ten Wurzel: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ **und** $\sqrt[n]{a^m}$

Beispiel: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ **und** $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$

Beispiele:

a) $\sqrt[4]{c} = c^{\frac{1}{4}}$

b) $\sqrt[5]{a^2} = a^{\frac{2}{5}}$

c) $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$

d) $2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$

Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Berechne!

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{12}$

b) $\sqrt{49} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{9}$

c) $\sqrt{81} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{4}$

d) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{21} \cdot \sqrt{3}$

e) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$

f) $\sqrt{144 \cdot 25} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$

Aufgabe 2: Ziehe teilweise die Wurzel!

a) $\sqrt{50}$

b) $\sqrt{8}$

c) $\sqrt{18}$

d) $\sqrt{32}$

e) $\sqrt{48}$

f) $\sqrt{20}$

Aufgabe 3: Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich!

a) $10\sqrt{6} + (3\sqrt{7} - 2\sqrt{6}) - 5\sqrt{7}$

b) $\sqrt{5} - (3\sqrt{8} - 4\sqrt{5}) + (\sqrt{8} - 5\sqrt{5})$

c) $3\sqrt{3} - (3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}) - (6\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

Aufgabe 4: Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich!

a) $\sqrt{3}(\sqrt{27} + \sqrt{3})$

b) $\sqrt{5}(\sqrt{125} - 2\sqrt{5})$

c) $2\sqrt{3}(\sqrt{12} - \sqrt{3})$

Aufgabe 5: Mache den Nenner rational!

a) $\frac{4}{\sqrt{7}}$

b) $\frac{2}{\sqrt{2b}}$

c) $\frac{a}{\sqrt{5a}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme

1. Lineare Gleichungen

Sind zwei Terme durch das mathematische Zeichen „=“ verbunden, so handelt es sich um eine Gleichung.

Um eine Gleichung zu lösen, wird sie umgeformt, bis die Variable auf einer Seite alleinsteht, das heißt, die Gleichung soll durch Äquivalenzumformungen auf die einfachste Form gebracht werden. Zulässig für die Umformungen sind die vier Grundrechenarten. Dies bedeutet:

→ Auf beiden Seiten einer Gleichung die gleiche Zahl addieren.

→ Auf beiden Seiten einer Gleichung die gleiche Zahl subtrahieren.

→ Beide Seiten einer Gleichung mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) multiplizieren.

→ Beide Seiten einer Gleichung durch die gleiche Zahl ($\neq 0$) dividieren.

Die Lösungsmenge einer Gleichung ist die Teilmenge der Zahlen, die eine wahre Aussage (w.A.) ergeben.

Eine lineare Gleichung ist eine Gleichung, bei der alle Variablen nur in der ersten Potenz (x^1) vorliegen.

Beispiele:

a) $7x + 19 = 12x - 1 \quad | -12x - 19$ — Terme mit einer Variablen werden auf die eine Seite und die Terme ohne eine Variable auf die andere Seite sortiert.

$-5x = -20 \quad |:(-5)$ — Auf beiden Seiten wird durch den Faktor vor der Variablen geteilt.

$x = 4 \qquad \mathbb{L} = \{4\}$ — Lösungsmenge angeben

b) $6(3x + 4) = 5(2x + 8)$ — Löse die Klammern mittels Ausmultiplizieren auf.

$18x + 24 = 10x + 40 \quad | -24 - 10x$ — Terme mit einer Variablen werden auf die eine Seite und die Terme ohne eine Variable auf die andere Seite sortiert.

$8x = 16 \quad |:8$ — Auf beiden Seiten wird durch den Faktor vor der Variablen geteilt.

$x = 2 \quad \mathbb{L} = \{2\}$ Lösungsmenge angeben

c) $-6x - 4 - (2 - 4x) = -2x$ Löse die Klammer auf.

$-6x - 4 - 2 + 4x = -2x$ Zusammenfassen

$-2x - 6 = -2x \quad | + 2x$ Terme mit einer Variablen werden auf die eine Seite und die Terme ohne eine Variable auf die andere Seite sortiert.

$-6 = 0$ f.A. $\mathbb{L} = \{\,\}$ Lösungsmenge angeben
(falsche Aussage)

d) $-2x - 1 + 2(2x - 2) - 4(0{,}5x - 4) = 11$ Löse die Klammern auf.

$-2x - 1 + 4x - 4 - 2x + 16 = 11$ Zusammenfassen

$11 = 11$ w.A.

$\mathbb{L} = \mathbb{R}$ Lösungsmenge angeben

Lösungsvielfalt einer linearen Gleichung

genau eine Lösung	**keine Lösung**	**unendlich viele Lösungen**
$\mathbb{L} = \{\boldsymbol{Zahl}\}$	$\mathbb{L} = \{\,\}$	$\mathbb{L} = \mathbb{R}$

2. Lineare Gleichungssysteme

Zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen bilden ein lineares Gleichungssystem.

Beachte:
Beim Lösen eines linearen Gleichungssystems muss man Zahlenpaare (x;y) finden, die beide Gleichungen erfüllen. Diese Zahlenpaare entsprechen im Koordinatensystem gerade den Koordinaten des Schnittpunktes der beiden zugehörigen Geraden.

Wird angewandt, wenn beide Gleichungen nach derselben Variablen aufgelöst sind.

1. Gleichsetzungsverfahren

Beim Gleichsetzungsverfahren löst man beide Gleichungen des LGS nach derselben Variablen auf. Durch Gleichsetzen der beiden Terme erhält man eine Gleichung mit nur einer Variablen.

Beispiel:

Löse das LGS rechnerisch!

$$(1)\ y = 4x - 2$$
$$(2)\ y - 3x = 5 \quad |+3x$$

Schritt 1: **Auflösen beider Gleichungen nach einer Variablen (z.B. y=)**

$$(1)\ \ y = 4x - 2$$
$$(2')\ y = 3x + 5$$

Schritt 2: **Gleichsetzen der beiden Gleichungen**

$(1) = (2')$: $\quad 4x - 2 = 3x + 5 \quad | -3x + 2$

Schritt 3: **Umstellen der neuen Gleichung nach der verbliebenen Variablen**

$$x = 7$$

Schritt 4: **Einsetzen der Lösung in Gleichung (1) oder Gleichung (2)**

Setze $x = 7$ in (1) ein: $\quad y = 4 \cdot 7 - 2$

$y = 26 \qquad \mathbb{L} = \{(7; 26)\}$

Probe: **Einsetzen des Ergebnisses in die andere Gleichung**

Setze $x = 7$ und $y = 26$ in (2) ein, da die Gleichung (1) bereits benutzt wurde:

$$26 - 3 \cdot 7 = 5$$
$$5 = 5 \qquad \text{w.A.}$$

Wird angewandt, wenn eine der beiden Gleichungen nach einer Variablen aufgelöst ist.

2. Einsetzungsverfahren

Um aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen eine Gleichung mit nur einer Variablen zu erhalten, kann man auch (1) in (2) oder (2) in (1), also eine Gleichung in eine andere Gleichung einsetzen. Dieses Verfahren bezeichnet man als Einsetzungsverfahren.

Beispiel:
Löse das LGS rechnerisch!

$$(1)\ 3x + 2y = 12$$
$$(2)\ x = y - 1$$

Schritt 1: **Einsetzen von (2) in (1)**

$(2)\ in\ (1):$ $\quad 3 \cdot (y-1) + 2y = 12$

Schritt 2: **Umstellen der neuen Gleichung nach der verbliebenen Variablen**

$$3y - 3 + 2y = 12$$
$$5y - 3 = 12 \quad |+3$$
$$5y = 15 \quad |:5$$
$$y = 3$$

Schritt 3: **Einsetzen der Lösung in Gleichung (1) oder Gleichung (2)**

Setze $y = 3$ in (2) ein: $\quad x = 3 - 1$

$$x = 2 \qquad \mathbb{L} = \{(2;3)\}$$

Probe: **Einsetzen des Ergebnisses in die andere Gleichung**

Setze $x = 2$ und $y = 3$ in (1) ein, da die Gleichung (2) bereits benutzt wurde:

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$$
$$12 = 12 \quad \text{w.A.}$$

Wird angewandt, wenn keine der beiden Gleichungen nach einer Variablen aufgelöst ist.

3. Additionsverfahren

Durch Umformen soll beim Addieren bzw. Subtrahieren der beiden Gleichungen eine Variable wegfallen. Dadurch entsteht eine Gleichung mit nur einer Variablen.

Beispiel:
Löse das LGS rechnerisch!

$$\begin{aligned}(1)\ \boxed{2x} + 3y &= 9 \quad |\cdot 3\\ (2)\ \boxed{3x} - 4y &= 5 \quad |\cdot(-2)\end{aligned}$$

Schritt 1: **Vervielfachen der beiden Gleichungen, so dass man ein gemeinsames Vielfaches der Koeffizienten von x bzw. y mit verschiedenen Vorzeichen erhält**

$$\begin{aligned}3\cdot(1) \quad = (1'):&\quad \boxed{6x} + 9y = 27\\ -2\cdot(2) = (2'):&\quad \boxed{-6x} + 8y = -10\end{aligned}$$

Schritt 2: **Gleichungen addieren**

$(1') + (2')$: $\quad (6x + 9y) + (-6x + 8y) = 27 - 10$

Schritt 3: **Umstellen nach der verbliebenen Variablen**

$$\begin{aligned}6x + 9y - 6x + 8y &= 17\\ 17y &= 17 \quad |:17\\ y &= 1\end{aligned}$$

Schritt 4: **Einsetzen der Lösung in Gleichung (1) oder Gleichung (2)**

Setze $y = 1$ in (1) ein:

$$\begin{aligned}2x + 3\cdot 1 &= 9\\ 2x + 3 &= 9 \quad |-3\\ 2x &= 6 \quad |:2\\ x &= 3 \qquad \mathbb{L} = \{(3;1)\}\end{aligned}$$

Probe: **Einsetzen des Ergebnisses in die andere Gleichung**

Setze $x = 3$ und $y = 1$ in (2) ein, da die Gleichung (1) bereits benutzt wurde:

$$\begin{aligned}3\cdot 3 - 4\cdot 1 &= 5\\ 5 &= 5 \quad \text{w.A.}\end{aligned}$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Bestimme die Variable a!

a) $-2a + 12 + 6a - 9 = 33 + 2a$

b) $3a - 6 = \frac{6a}{3}$

Aufgabe 2: Löse die nachfolgenden linearen Gleichungssysteme!

a) $(1)\ \ 7x + 9y - 19{,}5 = 0$

$(2)\ \ 6x + 4y = 0$

b) $(1)\ \ 9x + y = 25$

$(2)\ \ y = 2x + 14$

c) $(1)\ \ y = \frac{3}{4}x - 2$

$(2)\ \ 20 + 4y = 3x$

Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0 \quad , a \neq 0, x, b, c \in \mathbb{R}$, bezeichnet man als quadratische Gleichung.

1. Lösen durch Wurzelziehen

Quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + c = 0,\ \ a \neq 0$, heißen reinquadratische Gleichungen.

Diese Gleichungen $ax^2 + c = 0,\ \ a \neq 0$, können in die Gleichung $x^2 = -\frac{c}{a}$ umgeformt werden. Bei dieser Gleichung hängt die Anzahl der Lösungen von der Diskriminante $D = -\frac{c}{a}$ ab.

Es gilt hierbei: **die Gleichung $x^2 = D$ besitzt für:**

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
zwei Lösungen	**eine (doppelte) Lösung**	**keine Lösung**

Beispiele:

a)

$x^2 - 4 = 0 \quad | + 4$

$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$ $\qquad$ $D = 4 > 0$: 2 Lösungen

$x_{1/2} = \pm 2$ $\qquad$ ($x_1 = +2$ und $x_2 = -2$)

b)

$3x^2 + 4 = 79 \quad | - 4$

$3x^2 = 75 \quad | : 3$

$x^2 = 25 \quad | \sqrt{\ }$ $\qquad$ $D = 25 > 0$: 2 Lösungen

$x_{1/2} = \pm 5$ $\qquad$ ($x_1 = +5$ und $x_2 = -5$)

c)

$-\frac{1}{2} + 4x^2 = -\frac{1}{2} \quad | + \frac{1}{2}$

$4x^2 \quad = 0 \quad |:4$

$x^2 \quad = 0 \quad |\sqrt{\ }$ $\quad$ $\boldsymbol{D = 0}$: 1 Lösung

$x_{1/2} \quad = 0$ $\quad$ $(x_1 = x_2 = 0)$

d) $-\frac{1}{4}x^2 - 2 = 4 \quad |+2$

$-\frac{1}{4}x^2 \quad = 6 \quad |\cdot(-4)$

$x^2 \quad = -24$ $\quad$ $\boldsymbol{D = -24 < 0}$: keine Lösung

Es existiert keine Lösung, da $D < 0$ ist.

2. Lösen durch Ausklammern und Anwenden des Satzes vom Nullprodukt

Satz vom Nullprodukt:

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der beiden Faktoren Null ist.

Aus $\boldsymbol{a \cdot b = 0}$ folgt: $\boldsymbol{a = 0}$ und/ oder $\boldsymbol{b = 0}$.

Beispiel 1:

$-4x^2 + 5x \quad = 0$

$x \cdot (-4x + 5) = 0$ $\quad$ Ausklammern

$x_1 = 0$ $\qquad$ $-4x + 5 = 0 \quad |-5$ $\quad$ Anwenden des Satzes vom Nullprodukt

$-4x \quad = -5 \ |:(-4)$

$x_2 \quad = \frac{5}{4}$

Besitzt eine quadratische Gleichung die Form $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$, $\boldsymbol{a \neq 0}$, so bezeichnet man diese Gleichung als gemischtquadratische Gleichung.

Gleichungen der Form $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$, $\boldsymbol{a \neq 0}$, können gelöst werden durch:

Schritt 1: Ausklammern
Schritt 2: Anwenden des Satzes vom Nullprodukt

Beispiel 2:

a) $2x^2 + 3x \quad = 0$

$x \cdot (2x + 3) = 0$ — Ausklammern

$x_1 = 0 \qquad 2x + 3 = 0 \quad | -3$ — Anwenden des Satzes vom Nullprodukt

$2x \quad = -3 \; |:2$

$x_2 \quad = -\frac{3}{2}$

b) $-\frac{1}{2}x^2 \quad = -2x \quad | + 2x$

$-\frac{1}{2}x^2 + 2x \quad = 0$

$x \cdot \left(-\frac{1}{2}x + 2\right) = 0$ — Ausklammern

$x_1 = 0 \qquad -\frac{1}{2}x + 2 = 0 \quad | -2$ — Anwenden des Satzes vom Nullprodukt

$-\frac{1}{2}x \quad = -2 \; | \cdot (-2)$

$x_2 \quad = 4$

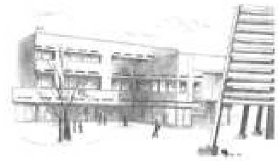
3. Lösen durch die Mitternachtsformel

Besitzt eine quadratische Gleichung die Form $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, so bezeichnet man diese Gleichung als gemischtquadratische Gleichung.

Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, können durch Anwenden der Mitternachtsformel

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

gelöst werden.



Beispiele:

a) $2x^2 + 2x - 12 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{-2 \pm 10}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow x_1 = \frac{-2+10}{4} = 2 \\ \rightarrow x_2 = \frac{-2-10}{4} = -3 \end{array}\right\} \text{ zwei Lösungen, da } D = 100 > 0$$

b) $-1x^2 - 4x - 4 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{-2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{4 \pm 0}{-2}$$

$\rightarrow x_{1/2} = \frac{4}{-2} = -2$ $\rightarrow$ eine (doppelte) Lösung, da $D = 0$

$(x_1 = x_2 = -2)$

c) $-3x^2 + 9x - 18 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-18)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 216}}{-6} = \frac{-9 \pm \sqrt{-135}}{-6}$$

$\rightarrow$ keine Lösung, da $D = -135 < 0$

Bei gemischtquadratischen Gleichungen der Form $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, $\mathbf{a \neq 0}$, hängt die Anzahl der Lösungen von der Diskriminante $\mathbf{D = b^2 - 4ac}$ ab.

Es gilt hierbei: **die Gleichung $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, $\mathbf{a \neq 0}$, besitzt für:**

$\mathbf{D > 0}$	$\mathbf{D = 0}$	$\mathbf{D < 0}$
zwei Lösungen	**eine (doppelte) Lösung**	**keine Lösung**

Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Löse mit Wurzelziehen!

a) $2x^2 + 3 = 75$

b) $-4x^2 + 4 = -12$

c) $2x^2 - 16 = -16$

d) $-5x^2 = 5$

Aufgabe 2: Löse durch Ausklammern und Anwenden des Satzes vom Nullprodukt!

a) $4x^2 - 12x = 0$

b) $15x^2 + 30x = 0$

c) $6x^2 = 9x$

d) $3x^2 - 9x = 7x - x^2$

Aufgabe 3: Löse mit der Mitternachtsformel!

a) $-4x^2 + 2x + 20 = 0$

b) $-2x^2 = 7x + 3$

c) $2x^2 + 5x + 2 = 0$

d) $2x^2 - 6x = -4$

Lösungen

Klammerrechnung

Aufgabe 1: Löse die Klammern auf und vereinfache die Terme so weit wie möglich!

a) $2x - \left[\frac{1}{2}x - (x+4) - 2\right] = 2{,}5x + 6$

b) $3y + [4 - (2y - 1) + 8y] + 7 = 9y + 12$

c) $4a - [2a - (a + 18) - 3] + 3 = 3a + 24$

d) $10x + y - [4x + (y - x) - 3x] = 10x$

e) $(5x + 8y) - [(3x - 6y) - (5x + 7y)] = 7x + 21y$

f) $6a - [9b - (2a + 4c) - (2a + 3b - 8c)] = 10a - 6b - 4c$

g) $8xy - [1 + (x + xy) - 2x] - (5xy - 1) = 2xy + x$

h) $-[2a - (a^2 - 3a) - (a^2 - 4a) - 5a] = 2a^2 - 4a$

Aufgabe 2: Multipliziere aus und fasse zusammen!

a) $4(x + y) = 4x + 4y$

b) $a(m + n) = am + an$

c) $2x(x + y) = 2x^2 + 2xy$

d) $-3a(-a - b) = 3a^2 + 3ab$

e) $2{,}4c(c^2 - 5c) = 2{,}4c^3 - 12c^2$

f) $-2(15d - 2e + 8f) = -30d + 4e - 16f$

g) $\frac{2}{3}g(9 - 15g) = 6g - 10g^2$

h) $-\frac{3}{4}h(-16h + 20) = 12h^2 - 15h$

Aufgabe 3: Klammere den größten gemeinsamen Faktor aus!

a) $2a - 2b = 2(a - b)$

b) $12c + 24d = 12(c + 2d)$

c) $26ab - 13ac = 13a(2b - c)$

d) $2ab + 2ac + 4ad = 2a(b + c + 2d)$

e) $22ax + 11ax - 33az = 33a(x - z)$

f) $\frac{3}{4}am - \frac{3}{4}an + \frac{3}{4}ao = \frac{3}{4}a(m - n + o)$

g) $18pq + 24po - 30qo = 6(3pq + 4po - 5qo)$

h) $6x^2y + 12xy + 9y = 3y(2x^2 + 4x + 3)$

Bruchrechnung I

***Aufgabe 1*:** Kürze so weit wie möglich!

a) $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ **b)** $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ **c)** $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$

d) $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ **e)** $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ **f)** $\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

g) $\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ **h)** $\frac{24}{6} = 4$ **i)** $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

Aufgabe 2: Berechne ohne Taschenrechner!

a) $\frac{3}{8} + \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$ **b)** $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ **c)** $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

d) $\frac{7}{12} + \frac{2}{3} = \frac{5}{4}$ **e)** $\frac{1}{15} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ **f)** $\frac{3}{5} + \frac{3}{10} + \frac{3}{5} = \frac{3}{2}$

Aufgabe 3: Berechne ohne Taschenrechner!

a) $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{3} - \frac{7}{9} = -\frac{4}{9}$ **c)** $\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$

d) $\frac{5}{6} - \frac{2}{9} = \frac{11}{18}$ **e)** $\frac{4}{5} - \frac{5}{20} - \frac{6}{20} = \frac{1}{4}$ **f)** $\frac{7}{15} - \frac{1}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$

Bruchrechnung II

Aufgabe 1: Berechne ohne Taschenrechner!

a) $\frac{4 \cdot 1}{3} = \frac{4}{3}$ **d)** $\frac{6 \cdot 2}{5} = \frac{12}{5}$ **g)** $\frac{8 \cdot 1}{8} = 1$

b) $\frac{1}{5} \cdot 3 = \frac{3}{5}$ **e)** $\frac{3}{4} \cdot 7 = \frac{21}{4}$ **h)** $\frac{2}{7} \cdot (-7) = -2$

c) $4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ **f)** $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$ **i)** $-7 \cdot \frac{4}{9} = -\frac{28}{9}$

Aufgabe 2: Berechne ohne Taschenrechner!

a) $\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ **d)** $\frac{6}{7} : \frac{2}{7} = 3$ **g)** $-\frac{2}{5} : \frac{1}{2} = -\frac{4}{5}$

b) $\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2$ **e)** $6 : \frac{1}{8} = 48$ **h)** $-\frac{10}{3} : \left(-\frac{5}{12}\right) = 8$

c) $\frac{1}{3} : \frac{3}{2} = \frac{2}{9}$ **f)** $\frac{2}{5} : \frac{1}{5} = 2$ **i)** $\frac{16}{9} : \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3}$

Aufgabe 3: Berechne ohne Taschenrechner!

a) $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{16}$

b) $\frac{3}{4}+3\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{9}{4}=3$

c) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

d) $\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{10}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right)=\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{9}=1$

e) $\frac{8}{7}+\frac{1}{2}:\frac{3}{4}=\frac{8}{7}+\frac{2}{3}=\frac{38}{21}$

f) $\left(\frac{8}{9}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{10}\right)\cdot 3=\frac{23}{36}\cdot 3=\frac{23}{12}$

g) $\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{5}{3}-\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{11}{10}-\frac{1}{5}=\frac{9}{10}$

h) $\left(\frac{1}{2}:\frac{2}{5}\right):\frac{5}{4}=5\cdot\frac{4}{5}=4$

Dreisatzrechnung

Aufgabe 1:

Tina muss für vier Liter Buttermilch 2,40 Euro bezahlen.

Aufgabe 2:

Der Gefrierschrank von Monikas Familie verbraucht in sieben Tagen 2,8 kWh.

Aufgabe 3:

Familie Maier benötigt für die Fahrt nach Wien 3,5 Stunden.

Aufgabe 4:

Die Maurer benötigen für die 12,4 m^3 Mauerwerk 2480 l Mörtel.

Aufgabe 5:

Familie Mai benötigt 6,4 Stunden, wenn sie eine fünfte Pumpe einsetzt.

Aufgabe 6:

Sechs Erntehelfer benötigen vier Stunden, um die Erdbeeren eines kompletten Erdbeerfeldes zu ernten.

Aufgabe 7:

Jede Person muss für die Busfahrt 21 Euro bezahlen, wenn zehn Schülerinnen und Schüler wegen Krankheit nicht am Ausflug teilnehmen können.

Prozentrechnung

Aufgabe 1:

Herr Haas erhält bei diesem Verkauf eine Vermittlungsgebühr in Höhe von 6000 Euro.

Aufgabe 2:

Die Auszubildende Nadine erhält einen Netto-Betrag in Höhe von 647,80 Euro.

Aufgabe 3:

a) $\frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\ \%$

b) $\frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\ \%$

Aufgabe 4:

Der Aktionär Herr Hofmann erhält eine Dividende von 14 %.

Aufgabe 5:

Der Bruttolohn von Herr Maier beträgt 1415,38 Euro.

Aufgabe 6:

Timo hat für sein erstes eigenes Auto 22500 Euro bezahlt.

Maßangaben

Aufgabe 1:

Der Zug fährt mit einer Verspätung von 52 Minuten ab.

Aufgabe 2: Rechne die nachfolgenden Größen in die vorgegebenen Einheiten um!

a) $3\frac{3}{4} h$ = 225 min

b) $3{,}5\ min = 210\ s = 210 : 60 : 60\ h = \frac{7}{120}\ h$

c) $3499\ km = 3499 \cdot 1000\ m = 3499000\ m$

d) $0{,}5\ mm^3 = 0{,}5 : 1000 : 1000 : 1000\ m^3 = 5 \cdot 10^{-10}\ m^3$

e) $300\ ml\ = 300 \div 1000\ l = 0{,}3\ l$

Aufgabe 3: Berechne und gib das Ergebnis in der angegebenen Einheit an!

a) $2{,}44\ m\ +\ 9{,}8\ cm\ +\ 12{,}3\ mm\ = 244\ cm + 9{,}8\ cm + 1{,}23\ cm = 255{,}03\ cm$

b) $3\ cm^2\ +\ 700\ mm^2 = 3\ cm^2 + 7\ cm^2 = 10\ cm^2$

c) $0{,}23\ dm^3 +\ 20\ cm^3 = 230\ cm^3 + 20\ cm^3 = 250\ cm^3$

Binomische Formeln

Aufgabe 1: Schreibe als Summe!

a) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

b) $(2x-y)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$

c) $(x-2y)\cdot(x+2y) = x^2 - 4y^2$

d) $(2a-5b)^2 = 4a^2 - 20ab + 25b^2$

e) $(x-5y)^2 = x^2 - 10xy + 25y^2$

f) $(3a-7b)\cdot(3a+7b) = 9a^2 - 49b^2$

Aufgabe 2: Schreibe als Produkt!

a) $9x^2 + 30x + 25 = (3x+5)^2$

b) $16a^2 - 72ab + 81b^2 = (4a-9b)^2$

c) $64a^2 - 1 = (8a+1)\cdot(8a-1)$

Aufgabe 3: Vervollständige zu einem Binom!

a) $4x^2 + 28xy + 49y^2$ **b)** $25a^2 - 70ab + 49b^2$ **c)** $64a^2 - 16ab + b^2$

Aufgabe 4: Vereinfache!

a) $(7x-5y)^2 + (6x+7y)(6x-7y) - (4x+9y)^2 = 69x^2 - 105y^2 - 142xy$

b) $4(3a-2)^2 - 2(a-4)(a+4) + 2(4a+2b)^2 = 66a^2 + 8b^2 + 32ab - 48a + 48$

Potenzrechnung

Aufgabe 1: Vereinfache und schreibe mit einer Potenz!

a) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 = a^{2+3+4} = a^9$

b) $x^3 \cdot x^3 \cdot x^5 = x^{3+3+5} = x^{11}$

c) $5^a \cdot 5^b \cdot 2^c \cdot 2^d = 5^{a+b} \cdot 2^{c+d}$

d) $x^m \cdot y^n \cdot z^p \cdot x^q \cdot y^r \cdot z = x^{m+q} \cdot y^{n+r} \cdot z^{p+1}$

e) $a \cdot b^y \cdot c^m \cdot a^x \cdot b^{2y} \cdot c^7 \cdot a^y \cdot b^{3y} = a^{1+x+y} \cdot b^{y+2y+3y} \cdot c^{m+7} = a^{1+x+y} \cdot b^{6y} \cdot c^{m+7}$

Aufgabe 2: Forme das Produkt bzw. den Quotienten um!

a) $x^2 \cdot y^2 = (xy)^2$

b) $a^5 \cdot b^5 = (ab)^5$

c) $2^3 \cdot z^3 = (2z)^3$

d) $10^4 \cdot x^4 = (10x)^4$

e) $\frac{c^5}{d^5} = \left(\frac{c}{d}\right)^5$

f) $\frac{(8a)^4}{(2a)^4} = \left(\frac{8a}{2a}\right)^4 = 4^4 = 256$

Aufgabe 3: Vereinfache so weit wie möglich!

a) $\frac{a^8}{a^2} = a^{8-2} = a^6$

b) $10^4 = 10000$

c) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

d) $(-3a)^2 = 9a^2$

e) $b^5 \cdot b^4 = b^{5+4} = b^9$

f) $(x^3)^7 = x^{3 \cdot 7} = x^{21}$

g) $\frac{(5x)^2}{(8y)^2} = \left(\frac{5x}{8y}\right)^2$

h) $(\frac{-2a}{3b})^2 = \frac{4a^2}{9b^2}$

Wurzelrechnung

Aufgabe 1: Berechne!

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{12} = 12$

b) $\sqrt{49} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{9} = 105$

c) $\sqrt{81} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{4} = 108$

d) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{21} \cdot \sqrt{3} = 21$

e) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 2304$

f) $\sqrt{144 \cdot 25} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = 360$

Aufgabe 2: Ziehe teilweise die Wurzel!

a) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

b) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

d) $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

e) $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

f) $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Aufgabe 3: Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich!

a) $10\sqrt{6} + \left(3\sqrt{7} - 2\sqrt{6}\right) - 5\sqrt{7} = 8\sqrt{6} - 2\sqrt{7}$

b) $\sqrt{5} - \left(3\sqrt{8} - 4\sqrt{5}\right) + \left(\sqrt{8} - 5\sqrt{5}\right) = -2\sqrt{8}$

c) $3\sqrt{3} - \left(3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}\right) - \left(6\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

Aufgabe 4: Fasse zusammen und vereinfache= so weit wie möglich!

a) $\sqrt{3}\left(\sqrt{27} + \sqrt{3}\right) = 9 + 3 = 12$

b) $\sqrt{5}\left(\sqrt{125} - 2\sqrt{5}\right) = 25 - 10 = 15$

c) $2\sqrt{3}\left(\sqrt{12} - \sqrt{3}\right) = 12 - 6 = 6$

Aufgabe 5: Mache den Nenner rational!

a) $\frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4}{7}\sqrt{7}$

b) $\frac{2}{\sqrt{2b}} = \frac{1}{b}\sqrt{2b}$

c) $\frac{a}{\sqrt{5a}} = \frac{1}{5}\sqrt{5a}$

d) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = -\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$

Lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1: Bestimme die Variable a!

a) $-2a + 12 + 6a - 9 = 33 + 2a$

$4a + 3 = 33 + 2a \quad | -3 - 2a$

$2a = 30 \quad |:2$

$a = 15 \quad \rightarrow \mathbb{L} = \{15\}$

b) $3a - 6 = \frac{6a}{3} \quad | \cdot 3$

$9a - 18 = 6a \quad | -9a$

$-18 = -3a \quad |:(-3)$

$6 = a \quad \rightarrow \mathbb{L} = \{6\}$

Aufgabe 2: Löse die nachfolgenden linearen Gleichungssysteme!

a) $(1)\ \ 7x + 9y - 19{,}5 = 0 \quad | +19{,}5$

$(2)\ \ 6x + 4y = 13$

$(1)\ \ 7x + 9y = 19{,}5$

$(2)\ \ 6x + 4y = 13$

Schritt 1: **Vervielfachen der beiden Gleichungen, so dass man ein gemeinsames Vielfaches der Koeffizienten von x bzw. y mit verschiedenen Vorzeichen erhält**

$$\begin{aligned} 6 \cdot (1) = (1'):&\quad \boxed{42x} + 54y = 117 \\ -7 \cdot (2) = (2'):&\quad \boxed{-42x} - 28y = -91 \end{aligned}$$

Schritt 2: **Gleichungen addieren**

$(1') + (2')$: $\quad (42x + 54y) + (-42x - 28y) = 117 - 91$

Schritt 3: **Umstellen nach der verbliebenen Variablen**

$26y = 26 \quad |:26$

$y = 1$

Schritt 4: **Einsetzen der Lösung in Gleichung (1) oder Gleichung (2)**

Setze $y = 1$ in (2) ein: $\quad 6x + 4 \cdot 1 = 13 \quad | -4 \quad |:6$

$x = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \mathbb{L} = \left\{\left(\frac{3}{2}; 1\right)\right\}$

b) $(1)\ \ 9x + y = 25$

$(2)\ \ y = 2x + 14$

Schritt 1: **Einsetzen von (2) in (1)**

$(2)\ in\ (1):$ $9x + (2x + 14) = 25$

Schritt 2: **Umstellen der neuen Gleichung nach der verbliebenen Variablen**

$$
\begin{aligned}
9x + 2x + 14 &= 25 \\
11x + 14 &= 25 \quad | -14 \\
11x &= 11 \quad |:11 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Schritt 3: **Einsetzen der Lösung in Gleichung (1) oder Gleichung (2)**

Setze $x = 1$ in (2) ein: $y = 2 \cdot 1 + 14$

$y = 16 \qquad \mathbb{L} = \{(1;16)\}$

c) $(1)\ \ y = \frac{3}{4}x - 2$

$(2)\ \ 20 + 4y = 3x$

Schritt 1: **Einsetzen von (1) in (2)**

$(1)\ in\ (2):$ $20 + 4 \cdot \left(\frac{3}{4}x - 2\right) = 3x$

Schritt 2: **Umstellen der neuen Gleichung nach der verbliebenen Variablen**

$$
\begin{aligned}
20 + 3x - 8 &= 3x \quad | -3x \\
12 &= 0 \quad f.A. \quad \rightarrow \mathbb{L} = \{\ \ \}
\end{aligned}
$$

Quadratische Gleichungen

Aufgabe 1: Löse mit Wurzelziehen!

a)

$$
\begin{aligned}
2x^2 + 3 &= 75 \quad | -3 \\
2x^2 &= 72 \quad |:2 \\
x^2 &= 36 \quad |\sqrt{\ } \\
x_{1/2} &= \pm 6
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
-4x^2 + 4 &= -12 \quad | -4 \\
-4x^2 &= -16 \quad |:(-4) \\
x^2 &= 4 \quad |\sqrt{\ } \\
x_{1/2} &= \pm 2
\end{aligned}
$$

c) $2x^2 - 16 = -16 \quad | + 16$

$2x^2 \quad = 0 \quad |: 2$

$x^2 \quad = 0 \quad |\sqrt{\ }$

$x_{1/2} \quad = 0$

d) $-5x^2 = 5 \quad |: (-5)$

$x^2 \quad = -1$ keine Lösung, da $D < 0$

Aufgabe 2: Löse durch Ausklammern und Anwenden des Satzes vom Nullprodukt!

a) $4x^2 - 12x \quad = 0$

$x \cdot (4x - 12) = 0$

$x_1 = 0$

$4x - 12 = 0 \quad | + 12$

$4x \quad = 12 \ |:12$

$x_2 \quad = 3$

b) $15x^2 + 30x \quad = 0$

$x \cdot (15x + 30) = 0$

$x_1 = 0$

$15x + 30 = 0 \quad | - 30$

$15x \quad = -30 \ |:15$

$x_2 \quad = -2$

c) $6x^2 \quad = 9x \quad | - 9x$

$6x^2 - 9x \quad = 0$

$x \cdot (6x - 9) = 0$

$x_1 = 0$

$6x - 9 = 0 \quad | + 9$

$6x \quad = 9 \quad |:6$

$x_2 \quad = \frac{3}{2}$

d) $3x^2 - 9x \;= 7x - x^2 \quad | -7x + x^2$

$4x^2 - 16x = 0$

$x_1 = 0 \qquad 4x - 16 = 0 \quad | +16$

$4x \quad = 16 \quad |:4$

$x_2 \quad = 4$

Aufgabe 3: Löse mit der Mitternachtsformel!

a) $-4x^2 + 2x + 20 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 20}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 320}}{-8} = \frac{-2 \pm \sqrt{324}}{-8} = \frac{-2 \pm 18}{-8}$$

$\rightarrow x_1 = \frac{-2+18}{-8} = -2$

$\rightarrow x_2 = \frac{-2-18}{-8} = 2{,}5$

b) $-2x^2 \quad = 7x + 3$

$2x^2 + 7x + 3 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-7 \pm 5}{4}$$

$\rightarrow x_1 = \frac{-7+5}{4} = -0{,}5$

$\rightarrow x_2 = \frac{-7-5}{4} = -3$

c) $2x^2 + 5x + 2 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$$

$\rightarrow x_1 = \frac{-5+3}{4} = -0{,}5$

$\rightarrow x_2 = \frac{-5-3}{4} = -2$

d) $2x^2 - 6x + 4 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{6 \pm 2}{4}$$

$\rightarrow x_1 = \frac{6+2}{4} = 2 \qquad \rightarrow x_2 = \frac{6-2}{4} = 1$